UNIVERSITATEA “BABEŞ - BOLYAI” CLUJ – NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Anamaria-Geanina MACOVEI

NOI CLASE DE FUNCȚII UNIVALENTE

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific:

Academician dr. Petru T. MOCANU

Cluj-Napoca, 2011

CUPRINS

Cuvinte cheie: Funcție univalentă, funcție analitică cu partea reală pozitivă, funcție stelată, funcție convexă, funcție aproape-convexă, funcție alfa-convexă, funcție spiralată, funcție analitică cu coeficienții negative, subordonare diferențială, subordonare diferențială de tip Briot-Bouquet, superordonare diferențială, superordonare diferențială de tip Briot-Bouquet, operatorul liniar Sălăgean, operatorului liniar Ruscheweyh.

INTRODUCERE

Teoria geometrică a funcțiilor univalente este una dintre domeniile analizei complexe în care rigoarea raționamentului analitic se împletește strâns cu intuiția geometrică și primele noțiuni au fost introduse la începutul secolului al XX - lea când au apărut primele lucrări importante cum ar fi cele scrise de P. Koebe, T. H. Gronwall, I. W. Alexander, L. Bieberbach.

Este demn de menționat faptul că, în dezvoltarea acestui domeniu al matematicii, matematicienii români au avut un merit deosebit. Creatorul școlii românești de teoria funcțiilor univalente este G. Călugăreanu care a obținut condiții necesare și suficiente de univalență. Continuatorul acestuia este Academicianul P. T. Mocanu care s-a impus pe plan mondial prin rezultate remarcabile și amintim câteva, a introdus noi clase de funcții univalente, funcțiile alfa-convexe sau funcțiile Mocanu, a abordat problema injectivității funcțiilor neanalitice și a creat împreună cu S. S. Miller o nouă metodă de studiu a unor clase de funcții univalente și anume „metoda funcțiilor admisibile" sau „metoda subordonărilor diferențiale". Mai târziu Academicianul P. T. Mocanu și S. S. Miller au introdus noțiunea duală a subordonării diferențiale numită „superordonare diferențială". Sub conducerea domnului Academician P. T. Mocanu s-a format o puternică școală clujeană de toeria geometrică a funcțiilor. Dintre numeroșii colaboratori ai domniei sale pe plan național amintim: N.N. Pascu, G.Ș. Sălăgean, T. Bulboacă, G. Kohr, P. Curt, Gh. Oroș, M Acu și alții, iar pe plan internațional, S.S. Miller, M.O. Reade, S. Ruscheweyh, S. Owa, R. Fourier, M.K. Aouf și alții.

În această teză de doctorat s-au obținut noi rezultate cu privire la subordonările și superordonările diferențiale precum și unele subclase de funcții univalente.

Lucrarea cuprinde patru capitole, o introducere și o bibliografie conținând 138 titluri, dintre care 21 sunt semnate de autor.

În primul capitol, intitulat „Generalități privind noțiunea de funcție univalentă" și structurat în patru paragrafe, sunt prezentate probleme generale privind teoria funcțiilor univalente, familii speciale ale acestora, funcții analitice cu partea reală pozitivă și noțiunea de subordonare.

Al doilea capitol intitulat „Clase speciale de funcții univalente" este structurat în nouă paragrafe. Aici sunt prezentate rezultate importante cu privire la clasa funcțiilor stelate, convexe, aproape-convexe, alfa-convexe, alfa-convexe p-simetrice, stelate de tip α, spiralate, stelate și convexe de ordin α și analitice cu coeficienții negativi, fiind expuse definiții, leme și teoreme fundamentale. Aceste noțiuni și rezultate sunt necesare pentru demonstrarea rezultatelor originale conținute în capitolul IV.

Următoarele două capitole conțin rezultate originale, publicate deja sau în curs de publicare.

„Subordonări și superordonări diferențiale" este al treilea capitol, fiind structurat în zece paragrefe. În primele două paragrafe sunt prezentate definiții, leme și teoreme fundamentale referitoare la subordonări diferențiale și subordonări diferențiale de tip Briot-Bouque. Aceste noțiuni și rezultate sunt necesare pentru demonstrarea rezultatelor originale conținute în următoarele paragrafe ale acestui capitol. În paragrafele III.3 și III.4 s-au determinat aplicații ale subordonărilor diferențiale şi subordonări diferențiale de tip Briot-Bouque şi sunt conținute în [57], [61], [64]. În următoarele două paragrafe sunt prezentate definiții şi teoreme fundamentale referitoare la superordonări diferențiale şi superordonări diferențiale de tip Briot-Bouque, necesare pentru demonstrarea rezultatelor originale conținute în următoarele paragrafe ale acestui capitol. O parte din aceste rezultate sunt conținute în [56]. În paragraful III.7 s-au determinat aplicații ale superordinărilor diferențiale de tip Briot-Bouquet obținute cu ajutorul operatorilor integrali, iar [54], [55], [58] conțin aceste rezultate. Paragraful III.8 conține aplicații ale subordonărilor şi superordonărilor diferențiale şi teoremele "sandwich". Aceste rezultate sunt conținute în [63], [65], [66]. Folosind operatorul Ruscheweyh în paragraful III.9 s-au determinat subordonări şi superordonări diferențiale pentru funcții analitice. Rezultatele acestui paragraf sunt conținute în [67]. În ultimul paragraf a acestui capitol sunt prezentate subordonări şi superordonări diferențiale folosind operatorul $I_k(r,\lambda)f(z)$, sunt conținute în [60], [68].

Ultimul capitol intitulat „Subclase de funcții univalente" este structurat în şase paragrafe. Toate rezultatele acestui capitol sunt originale. În paragraful IV.1 sunt prezentate subclase de funcții univalente definite cu ajutorul convoluției, notate $S_g{}^*$, K_g, C_g şi sunt conținute în [62]. Paragraful IV.2 intitulat „Subclase normate de funcții stelate şi convexe" prezintă subclasele notate $S^*(\zeta)$, $K(\zeta)$, conținute în [69]. Următorul paragraf este o împletire a paragrafelor anterioare, adică s-au determinat subclase normate de funcții univalente definite cu ajutorul convoluției, notate $S_g{}^*(\zeta)$, $K_g(\zeta)$, $C_g(\zeta)$, $M_{\alpha,g}(\zeta)$, $\hat{S}_{\gamma,g}(\zeta)$. Aceste rezultate sunt conținute în [70]. Subclase normate de funcții stelate şi convexe de ordin α sunt prezentate în paragraful IV.4, sunt notate $S^*(\alpha;\zeta)$, $K(\alpha;\zeta)$ şi sunt conținute în [71]. Rezultatele paragrafului IV.5, subclase normate de funcții alfa-convexe, notate $M_\alpha(\zeta)$, sunt conținute în [72]. Ultimul paragraf a acestui capitol este intitulat „subclase de funcții univalente cu coeficienti negativi" prezintă o nouă clasă de funcții notată $TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$ şi aceste rezultate sunt conținute în [73].

Țin să aduc pe acestă cale sincere mulțumiri şi să-mi exprim sentimentele de stimă şi respect conducătorului ştiințific al lucrării, domnului Academician Petru T. Mocanu pentru modul în care m-a îndrumat în elaborarea acestei lucrări, pentru sprijinul, încrederea pe care mi-a însuflețit-o şi încurajarea permanentă. De asemenea, mulțumirile mele se îndreaptă către domnul prof. univ. dr. Grigore Şt. Sălăgean ale cărui rezultate în domeniul funcțiilor cu coeficienți negativi mi-au fost de un real folos, doamnei prof. univ. dr. Gabriela Kohr, precum şi celorlalți domni profesori de la Catedra de Teoria Funcțiilor. Şi nu în ultimul rând aş vrea să mulțumesc copiilor, părinților şi soțului pentru susținere, înțelegere, încurajare şi ajutorul acordat.

În cele ce urmează, am selectat cele mai importante rezultate din fiecare capitol.

I. GENERALITĂŢI PRINVIND NOŢIUNEA DE FUNCŢIE UNIVALENTĂ

În acest capitol sunt prezentate noţiuni şi rezultate elementare privind teoria funcţiilor univalente, familii speciale ale acestora, funcţii analitice cu partea reală pozitivă şi noţiunea de subordonare.

I.1. Probleme generale privind teoria funcţiilor univalente

Definiţia I.1.1 [38]: *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *domeniu şi fie funcţia* $f : D \to \mathbb{C}$. *Spunem că funcţia f este o **funcţie univalentă**, dacă* $f \in \mathcal{H}(D)$ *şi f este injectivă pe D.*

Definiţia I.1.2 [38]: *Notăm cu* $\mathcal{H}_u(D) = \{ f \in \mathcal{H}(D)$*: f univalentă pe D* $\}$. $\mathcal{H}_u(D)$ *poartă numele de **clasa funcţiilor univalente**.*

Teorema I.1.1 [20,38]: *Dacă funcţia* $f \in \mathcal{H}_u(D)$, *atunci* $f'(z) \neq 0$, *pentru orice* $z \in D$.

Corolarul I.1.2 [38]: *Fie D un domeniu convex din planul* $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(D)$ *astfel încât* $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, *pentru orice* $z \in D$, *atunci* $f \in \mathcal{H}_u(D)$.

I.2. Familii speciale de funcţii univalente în *U*

Notăm discul unitate în planul complex

$$U = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}.$$

Mulţimea funcţiilor $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfe în discul unitate se notează cu $\mathcal{H}(U)$.

Pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, notăm

$$\mathcal{H}[a,n] = \{ f \in \mathcal{H}(U) : \ f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots \},$$

$$\mathcal{A}_n = \{ f \in \mathcal{H}(U) : \ f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots \},$$

iar pentru $n = 1$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

Un loc important în teoria funcţiilor univalente îl ocupă clasa S a funcţiilor de forma:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \ z \in U$$

olomorfe şi univalente în discul unitate *U*.

Notăm cu $S = \{ f \in \mathcal{H}_u(D)$: $f(0) = f'(0) - 1 = 0 \}$.

Teorama I.2.4 [7]: *Dacă* $f \in S$, $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, $z \in U$, *atunci* a_2 *satisface relaţia* $|a_2| \leq 2$. *Are loc egalitatea* $|a_2| = 2$ *dacă şi numai dacă f este o funcţie de tip Koebe, adică*

$$f(z) = K_\tau(z) = \frac{z}{\left(1 + e^{i\tau} z\right)^2}, \ z \in U, \ \tau \in \mathbb{R}.$$

Conjectura I.2.1 [9]: *Dacă* $f \in S$, $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, $z \in U$, *atunci* $|a_n| \leq n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Corolarul I.2.3 [95]: *Clasa* S *este compactă.*

I.3. Funcții analitice cu partea reală pozitivă

Definiția I.3.1 [95]: *Introducem o nouă clasă de funcții* $\mathcal{P} = \{ p \in \mathcal{H}(U) : p(0) = 1,\ \operatorname{Re} p(z) > 0,$ $z \in U \}$ *numită* ***clasa de funcțiilor de tip Caratheodory****.*

Definiția I.3.2 [95]: *Introducem o nouă clasă de funcții* $\mathcal{B} = \{ \varphi \in \mathcal{H}(U) : \varphi(0) = 0,\ |\varphi(z)| < 1,$ $z \in U \}$ *numită* ***clasa de funcțiilor de tip Schwarz****.*

Teorema I.3.4 [18]: *Dacă* $p \in \mathcal{P},\ p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots,\ z \in U$, *atunci* $|p_n| \le 2$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$. *Egalitatea are loc dacă şi numai dacă:*

$$p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z},\ z \in U,\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1.$$

I.4. Subordonare

Definiție I.4.1 [95]: *Fie funcțiile* $f, F \in \mathcal{H}(U)$*. Spunem că funcția* ***f este subordonantă funcției F*** *şi vom nota* $f \prec F$ *sau* $f(z) \prec F(z), z \in U$ *dacă există o funcție* $w \in \mathcal{H}(U)$ *cu* $w(0) = 0$ *şi* $|w(z)| < 1,\ z \in U$ *astfel încât* $f(z) = F[w(z)],\ z \in U$.

Teorema I.4.1 [95]: *Fie funcțiile* $f, F \in \mathcal{H}(U)$ *şi presupunem că F este univalentă în U. Atunci* $f(z) \prec F(z), z \in U$ *dacă şi numai dacă* $f(0) = F(0)$ *şi* $f(U) \subseteq F(U)$.

Corolarul I.4.1 [49]: *Fie funcțiile* $f, F \in \mathcal{H}(U)$ *astfel încât F este univalentă în U.*

a) *Dacă* $f(0) = F(0)$ *şi* $f(U) \subseteq F(U)$, *atunci* $f(\overline{U_r}) \subseteq F(\overline{U_r}), 0 < r < 1$.

b) *Egalitatea* $f(\overline{U_r}) = F(\overline{U_r})$ *pentru un* $r < 1$ *are loc dacă şi numai dacă* $f(U) = F(U)$ *sau* $f(z) = F(\lambda z),\ |\lambda| = 1$.

II. CLASE SPECIALE DE FUNCȚII UNIVALENTE

În acest capitol sunt prezentate rezultate importante cu privire la clasa funcțiilor stelate, convexe, aproape-convexe, alfa-convexe, alfa-convexe p-simetrice, stelate de tip α, spiralate, stelate şi convexe de ordin α şi analitice cu coeficienții negativi, fiind expuse definiții, leme şi teoreme fundamentale.

II.1. Funcții stelate

Funcțiile stelate sunt introduse pentru prima dată în 1920 de J. W. Alexander.

Teorema II.1.1 [95]: *Fie funcția* $f \in \mathcal{H}(U), f(0) = 0$*. Atunci funcția* f *este stelată în U dacă şi numai dacă* $f'(0) \neq 0$ *şi*

$$\operatorname{Re}\frac{z f'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in U.$$

Definiția II.1.6 [95]: *Notăm cu* $S^* = \{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\dfrac{z f'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in U \}$. S^* *poartă numele de* ***clasa funcțiilor stelate.***

Teorema II.1.3 [95]: *Clasa* S^* *este compactă.*

Teorema II.1.5 [50,101]: *Dacă* $f \in S^*$, *unde* $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots,\ z \in U$, *atunci* $|a_n| \le n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$. *Egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $f(z) = K_\tau(z),\ z \in U$, $\tau \in \mathbb{R}$.

II.2. Funcții convexe

Funcțiile convexe au fost introduse în anul 1913 de E. Study [138], iar studiul lor a fost continuat de T. H. Gronwall [35] şi K. Lowner [50].

Lema II.2.2 [123]: Fie funcția $p \in \mathcal{H}(U)$, *astfel încât* $\operatorname{Re} p(0) > 0$ *şi fie* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

$$\operatorname{Re}\left[p(z) + \alpha \frac{z p'(z)}{p(z)} \right] > 0,\ z \in U \ \Rightarrow\ \operatorname{Re} p(z) > 0,\ z \in U.$$

Teorema II.2.1 [95]: *Fie funcția* $f \in \mathcal{H}(U)$. *Atunci funcția* f *este convexă în U dacă şi numai dacă* $f'(0) \neq 0$ *şi*

$$\operatorname{Re}\frac{z f''(z)}{f'(z)} + 1 > 0,\ z \in U.$$

Definiția II.1.4 [95]: *Notăm cu* $K = \{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\dfrac{z f''(z)}{f'(z)} + 1 > 0,\ z \in U \}$, *K poartă numele de* ***clasa funcțiilor convexe***.

Teorema II.2.2 [95]: *Funcția* $f \in K$ *dacă şi numai dacă* $g \in S^*$, *unde* $g(z) = z f'(z),\ z \in U$ sau $f \in K \Leftrightarrow z f'(z) \in S^*$.

Teorema II.2.5 [95]: *Clasa K este compactă.*

Teorema II.2.6 [50]: *Dacă* $f \in K,\ f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,\ z \in U$, *atunci* $|a_n| \le 1$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$. *Egalitatea are loc dacă şi numai dacă:* $f(z) = \dfrac{z}{1 + e^{i\tau} z},\ z \in U,\ \tau \in \mathbb{R}$.

G. S. Sălăgean şi S. Ruscheweyh introduc doi operatori diferențiali care permit, în anumite situații, studierea simultană a funcțiilor stelate şi convexe, precum şi a unor subclase ale acestora.

Definiția II.2.8 [125]: *Definim* ***operatorul diferențial Sălăgean*** $D^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$, *prin:*

$$\left.\begin{aligned} &D^0 f(z) = f(z), \\ &D^1 f(z) = Df(z) = z f'(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &D^n f(z) = D\left(D^{n-1} f(z)\right). \end{aligned}\right)$$

Observația II.2.10: Dacă funcția $f \in \mathcal{A}$, $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j,\ z \in U$, atunci:

$$D^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j , \ z \in U .$$

Definiție II.2.9 [125]: *Spunem că funcția* $f \in \mathcal{A}$ *este* ***n-stelată****,* $n \in \mathbb{N}$*, dacă verifică inegalitatea:*

$$\mathrm{Re}\frac{D^{n+1} f(z)}{D^n f(z)} > 0 , \ z \in U .$$

Vom nota cu S_n^* *clasa acestor funcții.*

Teorema II.2.10 [5] *Fie* $\phi \in \mathcal{A}$ *convexă,* $g \in S^*$ *şi* $F \in \mathcal{H}(U)$ *astfel încât* $\mathrm{Re}\, F(z) > 0$, $z \in U$. *Atunci* $\frac{\phi * Fg}{\phi * g}$ *este convexă.*

Definiția II.2.11 [121]: *Definim* ***operatorul Ruscheweyh*** $R^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$*, prin:*

$$R^n f(z) = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} * f(z) = \frac{z\left(z^{n-1} f(z)\right)^{(n)}}{n!}, \ z \in U .$$

Observația II.2.12 [121]: Dacă funcția $f \in \mathcal{A}$, $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $z \in U$, atunci

$$R^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} C_{n+j-1}^{n} a_j z^j , \ z \in U .$$

II.3. Funcții aproape-convexe

Definiția II.3.1 [95]: *O funcție* $f : U \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ *se numeşte* ***aproape-convexă*** *dacă există o funcție* φ *convexă în U astfel încât:*

$$\mathrm{Re}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0 , \ z \in U .$$

Spunem că funcția f *este* ***aproape-convexă în raport cu funcția*** φ.

Definiția II.3.2 [95]: *Notăm cu* $C = \{ f \in \mathcal{A} : (\exists)\, \varphi \in K ,\ \mathrm{Re}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0 , z \in U \}$, *C poartă numele de* ***clasa funcțiilor aproape-convexe şi normate****.*

Teorema II.3.1 [43,106]: *Fie* $D \subset \mathbb{C}$ *un domeniu simplu conex şi fie funcția* $f \in \mathcal{H}(D)$. *Să presupunem că există o funcție* $\varphi \in \mathcal{H}_u(D)$ *astfel încât* $\varphi(D) = \Delta$ *este undomeniu convex. Atunci* $\mathrm{Re}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0$, $z \in D$ *(adică funcția* f *este aproape-convexă în raport cu* φ*) implică funcția* f *univalentă în D.*

Teorema II.3.3 [116,117]: *Dacă* $f \in C$, $f(z) = z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$, $z \in U$, *atunci* $|a_n| \le n$, $n \ge 2$. *Egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $f(z) = K_\tau(z) = \frac{z}{\left(1 + e^{i\tau} z\right)^2}$, $z \in U$, $\tau \in \mathbb{R}$.

II.4. Funcții alfa-convexe (funcții Mocanu)

Cu scopul de a stabili o legătură între noțiunile de convexitate şi de stelaritate, în anul 1969, P. T. Mocanu [92] introduce noțiunea de alfa-convexitate. Mai târziu au fost obținute diverse proprietăți ale acestora de către P. T. Mocanu, S. S. Miller şi M. O. Reade [88,89].

Teorema II.4.1 [92]: *Fie funcția f alfa-convexă pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dacă şi numai dacă $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$ pentru $|z| = r$, unde:*

$$J(\alpha, f; z) = (1-\alpha)\frac{z f'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right).$$

Definiția II.4.3 [92]: *Notăm cu $M_\alpha = \{ f \in \mathcal{H}(U) : f(0) = f'(0) - 1 = 0$, $\frac{f(z) f'(z)}{z} \neq 0$, $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$, $z \in U \}$, M_α poartă numele de **clasa funcțiilor Mocanu sau alfa-convexe**.*

II.5. Funcții alfa-convexe p-simetrice

Definiția II.5.1 [26]: *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Notăm cu $M_{\alpha,p} = \left\{ f \in M_\alpha : f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \ldots, z \in U \right\}$, $M_{\alpha,p}$ poartă numele de **clasa funcțiilor alfa-convexe p-simetrice**.*

Teorema II.5.2 [26]: *Dacă funcția $f \in M_{\alpha,p}$, unde $\alpha > 0$ şi $z \in U$ este un punct fixat, atunci:*

$$\left[-M(-r^p, \alpha p)\right]^{\frac{1}{p}} \leq |f(z)| \leq \left[M(r^p, \alpha p)\right]^{\frac{1}{p}},$$

unde $M(r, \alpha) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \frac{\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1-\rho)^{\frac{2}{\alpha}}} d\rho\right]^\alpha$. Egalitatea este atinsă (în ambele părți) dacă funcția f este de forma $f(z) = \left[K_\tau(z^p, \alpha p)\right]^{\frac{1}{p}}$.

II.6. Funcții stelate de tip α

Definiția II.6.1 : *Fie funcția $f \in S^*$. Spunem că funcția f este **stelată de tip** α, şi notăm $f \in S^*[\alpha]$, dacă $\alpha = \alpha(f) = \sup\{\beta : f \in M_\beta\}$.*

Definiția II.6.2: Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. *Notăm cu $S_p^*[\alpha] = \left\{ f \in S^*[\alpha] : f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \ldots, z \in U \right\}$, $S_p^*[\alpha]$ poartă numele de **clasa funcțiilor stelate de tip α p-simetrice**.*

Teorema II.6.1 [26]: *Funcția $f \in S_p^*[\alpha]$ dacă şi numai dacă $g \in S^*[\alpha p]$, $\alpha \geq 0$, unde $f(z) = \left[g(z^p)\right]^{\frac{1}{p}}$, $p = 2, 3, \ldots$.*

II.7. Funcții spiralate

În anul 1932, L. Spacek [136] prezintă o generalizare a funcțiilor stelate şi anume clasa funcțiilor spiralate.

Teorema II.7.1 [8] : *Fie funcția* $f \in \mathcal{H}(U)$, *cu* $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ și $f(z)\neq 0$, $z\in U$ *şi fie* $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. *Atunci funcția* f *este spiralată de tip* γ *dacă şi numai dacă:*

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\gamma}\frac{z f'(z)}{f(z)}\right]>0,\ z\in U.$$

Definiția II.7.7 [8]: *Notăm cu* $\hat{S}_\gamma = \left\{ f\in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left[e^{-i\gamma}\frac{z f'(z)}{f(z)}\right]>0, z\in U\right\}$, *unde* $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\hat{S}_\gamma$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor spiralate de tip*** γ ***şi normate uzual în discul unitate U***.

II.8. Funcții stelate şi convexe de ordin α

Definiția II.8.1 [95]: Fie $0\leq\alpha<1$. *Notăm cu* $S^*(\alpha)=\left\{ f\in\mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{z f'(z)}{f(z)}>\alpha, z\in U\right\}$, $S^*(\alpha)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor stelate de ordin*** α**.**

Definiția II.8.2 [95]: Fie $0\leq\alpha<1$. *Notăm cu:* $K(\alpha)=\left\{ f\in\mathcal{A} : \mathrm{Re}\frac{z f''(z)}{f'(z)}+1>\alpha, z\in U\right\}$, $K(\alpha)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor convexe de ordin*** α**.**

II.9. Funcții analitice cu coeficienții negativi

Definiția II.9.1: *Notăm cu* $T=\left\{f\in S : f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,\ a_n\geq 0,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ z\in U\right\}$ *şi prin* $T^*=T\cap S^*$, T^* *poartă numele de* ***clasa funcțiilor stelate cu coeficienți negativi***, $T^*(\alpha)=T\cap S^*(\alpha)$, $T^*(\alpha)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor stelate de ordin*** α ***cu coeficienți negativi***, $T^c=T\cap K$, T^c *poartă numele de* ***clasa funcțiilor convexe cu coeficienți negativi*** *şi* $T^c(\alpha)=T\cap K(\alpha)$, *cu* $0\leq\alpha<1$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor convexe de ordin*** α ***cu coeficienți negativi***.

Definiția II.9.2: *Notăm cu:* $T_d^*=\left\{f\in T : \left|\frac{z f'(z)}{f(z)}-1\right|<1, z\in U\right\}$.

Teorema II.9.2 [134]: *Fie funcția* f *definită de relația* (II.9.1). *Atunci* $f\in T^*(\alpha)$ *dacă şi numai dacă:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}a_n\leq 1$ *şi* $f\in T^c(\alpha)$ *dacă şi numai dacă:* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}a_n\leq 1$.

III. SUBORDONĂRI ŞI SUPERORDONĂRI DIFERENȚIALE

În acest capitol sunt prezentate definiții, leme şi teoreme fundamentale referitoare la subordonări şi superordonări diferențiale, subordonări şi superordonări diferențiale de tip Briot-Bouque, precum şi aplicații ale acestora folosind diferite funcții şi operatori liniari.

III.1. Subordonări diferențiale

Metoda subordonărilor diferențiale, cunoscută şi sub numele de metoda funcțiilor admisibile, este una dintre cele mai noi metode folosite în teoria geometrică a funcțiilor analitice şi a fost introdusă de S. S. Miller şi P. T. Mocanu în lucrările [76,77] şi apoi dezvoltată în multe alte lucrări.

Definiția III.1.1: *Fie* $\psi:\mathbb{C}^3\times U\to\mathbb{C}$ *şi fie funcția h univalentă în discul unitate U. Dacă funcția* $p\in\mathcal{H}\left[a,n\right]$ *verifică subordonarea diferențială:*

$$\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\,p''(z); z\right)\prec h(z),\quad z\in U\ , \tag{III.1.4}$$

atunci funcția p se numeşte ***(a, n) soluție a subordonării diferențiale*** (III.1.4).

Definiția III.1.2: *Subordonarea din relația* (III.1.4) *se numeşte* ***subordonare diferențială de ordinul doi,*** *iar funcția q univalentă în U, se numeşte* ***(a, n) dominantă a soluțiilor subordonării diferențiale*** *din relația* (III.1.4).

Definiția III.1.3: *O dominantă* $\widetilde{q}$ *astfel încât* $\widetilde{q}(z)\prec q(z)$ *oricare ar fi dominanta q pentru relația* (III.1.4) *se numeşte* ***cea mai bună (a, n) dominantă***.

Definiția III.1.4: *Fie* $\psi:\mathbb{C}^3\times U\to\mathbb{C}$ *şi fie funcția h univalentă în discul unitate U. Dacă p este o funcție analitică în discul unitate U şi verifică subordonarea diferențială din relația* (III. 1.4), *atunci funcția p se numeşte* ***soluție a subordonării diferențiale***.

Definiția III.1.5: *Funcția univalentă q se numeşte* ***o dominantă a subordonării diferențiale*** *din relația* (III.1.4)*, dacă* $p\prec q$ *, pentru orice p care satisface relația* (III.1.4).

Lema III.1.1 [76]: *Fie* $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ *, cu* $0<r_0<1$ *şi fie* $f(z)=a_n z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots$ *o funcție continuă în U* (0; *r*₀) *şi analitică în* $U(0;r_0)\cup\{z_0\}$ *cu* $f(z)\not\equiv 0$ *şi* $n\ge 1$. *Dacă* $|f(z_0)|=\max\left\{|f(z)|\ :\ z\in\overline{U}(0;r_0)\right\}$*, atunci există un număr real m,* $m\ge n$ *, astfel încât:*

a) $\dfrac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}=m$; b) $\operatorname{Re}\dfrac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}+1\ge m$.

Definiția III.1.6: *Se notează cu* $\mathcal{Q}$ *mulțimea funcțiilor q care sunt olomorfe şi injective pe* $\overline{U}\setminus E(q)$*, unde*

$$E(q)=\left\{\zeta\in\partial U:\lim_{z\to\zeta}q(z)=\infty\right\},$$

şi în plus $q'(\zeta)\neq 0$ *pentru* $\zeta\in\partial U\setminus E(q)$. *Mulțimea E(q) se numeşte* ***mulțime de excepție***. *Notăm cu* $\mathcal{Q}(a)$ *subclasa funcțiilor* $\mathcal{Q}$ *care îndeplinesc condiția* $q(0)=a$.

Definiția III.1.6 [76, 77]: *Fie mulțimea* $\Omega\subset\mathbb{C}$*, fie funcția* $q\in\mathcal{Q}$ *şi* $n\in\mathbb{N}, n\ge 1$. *Vom nota cu* $\Psi_n[\Omega,q]$ *clasa funcțiilor* $\psi:\mathbb{C}^3\times U\to\mathbb{C}$ *care satisfac condiția* $\psi(r,s,t;z)\notin\Omega$*, atunci când:*

$$r = q(\zeta),\ s = m\zeta\, q'(\zeta),\ \ \mathrm{Re}\left[\frac{t}{s}+1\right] \ge \mathrm{Re}\left[\frac{\zeta\, q''(\zeta)}{q'(\zeta)}+1\right], \qquad \text{(III.1.5)}$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$ *şi* $m \ge n$. *Mulțimea* $\Psi_n[\Omega, q]$ *se numeşte* ***clasa funcțiilor admisibile,*** *iar condiția* $\psi(r,s,t;z) \notin \Omega$ *se numeşte* ***condiție de admisibilitate***.

Teorema III.1.3 [82]: *Fie* $\psi \in \Psi_n[h,q]$, *unde* $q(0) = a$ *şi* $\psi(a,0,0;0) = h(0)$. *Dacă funcția* $p(z) = a + p_n z^n + \ldots$, $p \in \mathcal{H}[a,n]$, *iar funcția* $\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\,p''(z); z\right) \in \mathcal{H}(U)$, *atunci avem:*

$$\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z).$$

Teorema III.1.4 [76,77]: *Fie funcțiile univalente* $h, q \in \mathcal{H}_u(U)$ *cu* $q(0) = a$ *şi notăm* $h_\rho(z) = h(\rho z)$, $q_\rho(z) = q(\rho z)$. *Fie funcția* $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ *cu* $\psi(a,0,0;0) = h(0)$ *care verifică una din următoarele condiții:*

a) $\psi \in \Psi_n[\Omega, q_\rho]$, *pentru un anumit* $\rho \in (0,1)$,

sau

b) *există un* $\rho_0 \in (0,1)$ *astfel încât* $\psi \in \Psi_n[h_\rho, q_\rho]$ *pentru orice* $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă funcția $p(z) = a + p_n z^n + \ldots$, $p \in \mathcal{H}[a,n]$, *iar funcția* $\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \in \mathcal{H}(U)$, *atunci avem:*

$$\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z).$$

Teorema III.1.7 [53]: *Fie funcția* $p(z) = a + p_n z^n + \ldots$, $p \in \mathcal{H}[a,n]$.

a) *Dacă* $\psi \in \Psi_n[\Omega, a]$, *atunci avem:*

$$\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \in \Omega,\ z \in U \Rightarrow |p(z)| < 1,\ z \in U.$$

b) *Dacă* $\psi \in \Psi_n[a]$, *atunci avem:*

$$\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) < 1,\ z \in U \Rightarrow |p(z)| < 1,\ z \in U.$$

Teorema III.1.9 [95]: *Fie funcția* $p(z) = a + p_n z^n + \ldots$, $p \in \mathcal{H}[a,n]$.

a) *Dacă* $\psi \in \Psi_n\{\Omega, a\}$, *atunci avem:*

$$\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \in \Omega,\ z \in U \Rightarrow \mathrm{Re}\, p(z) > 0,\ z \in U.$$

b) *Dacă* $\psi \in \Psi_n\{a\}$, *atunci avem:*

$$\psi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) > 0,\ z \in U \Rightarrow \mathrm{Re}\, p(z) > 0,\ z \in U.$$

Teorema III.1.11 [53]: *Fie funcția* $p(z) = a + p_n z^n + \ldots$, $p \in \mathcal{H}[a,n]$, *unde* $|a| < 1$ *şi fie funcția* $P : U \to \mathbb{C}$, *cu* $|P(z)| < 1$, $z \in U$. *Atunci avem:*

$$|p(z) + P(z)\, z\, p'(z)| < 1,\ \ z \in U \Rightarrow |p(z)| < 1,\ z \in U.$$

Teorema III.1.12 [53]: *Fie funcția* $p(z) = a + p_n z^n + \ldots$, $p \in \mathcal{H}[a,n]$, *unde* $|a| < M$, $M > 0$ *şi fie funcția* $P : U \to \mathbb{C}$, *cu* $|P(z)| < M$, $z \in U$. *Atunci avem:*

$$|p(z) + P(z)\, z\, p'(z)| < M,\ \ z \in U \Rightarrow |p(z)| < M,\ z \in U.$$

Definiția III.1.7: *Fie numărul* $c \in \mathbb{C}$ *cu* $\mathrm{Re}\, c > 0$, *fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi definim*

$$C_n = C_n(c) = \frac{n}{\operatorname{Re} c}\left[|c|\sqrt{1+\frac{2\operatorname{Re} c}{n}} + \operatorname{Im} c \right].$$

Dacă funcția univalentă R este definită prin relația $R(z) = \frac{2C_n z}{1-z^2}$*, atunci vom nota cu* $R_{c,n}$ ***funcția „Open Door”*** *definită prin relația:*

$$R_{c,n}(z) = R\left(\frac{z+b}{1+\bar{b}z}\right) = 2C_n \frac{(z+b)(1+\bar{b}z)}{(1+\bar{b}z)^2-(z+b)^2},\ unde\ b = R^{-1}(c).$$

Lema III.1.7 [85]: *Fie numărul* $c \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re} c > 0$*, fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $R_{c,n}$ *funcția „Open Door” şi fie funcția* $P \in \mathcal{H}[c,n]$ *care verifică subordonarea diferențială* $P(z) \prec R_{c,n}(z)$*. Dacă funcția* $p \in \mathcal{H}\left[\frac{1}{c}, n\right]$ *verifică ecuația diferențială* $z\,p'(z) + P(z)\,p(z) = 1$*, atunci* $\operatorname{Re} p(z) > 0$*,* $z \in U$*.*

Teorema III.1.14 [83,84]: *Fie funcțiile* $\phi, \varphi \in \mathcal{H}[1,n]$*, cu* $\phi(z)\varphi(z) \neq 0$*,* $z \in U$*. Fie numerele* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ *astfel încât* $\beta \neq 0$*,* $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ *şi* $\operatorname{Re}(\alpha+\delta) > 0$*. Fie funcția* $f \in \mathcal{A}_n$ *şi presupunem că*

$$P(z) \equiv \alpha \frac{z f'(z)}{f(z)} + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \delta \prec R_{\alpha+\delta}(z),$$

unde $R_{c,n}$ *este funcția „Open Door”. Dacă* $F = I_{\beta,\gamma}(f)$ *este definită prin relația*

$$F(z) = \left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\phi(z)} \int_0^z f^{\alpha}(t)\, t^{\delta-1}\, \varphi(t)\, dt\right]^{\frac{1}{\beta}} = z + A_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

atunci $F \in \mathcal{A}_n$*,* $\frac{F(z)}{z} \neq 0$*,* $z \in U$*, şi* $\operatorname{Re}\left[\beta \frac{zF'(z)}{F(z)} + \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} + \gamma\right] > 0$*,* $z \in U$*.*

III.2. Subordonări diferențiale de tip Briot-Bouquet

Definiția III.2.1: *Printr-un* ***operator diferențial de tip Briot – Bouquet*** *înțelegem un operator de forma:*

$$\Phi\left(p(z), z\,p'(z)\right),\ unde\ \Phi(r,s) = r + \frac{s}{\beta r + \gamma}.$$

Definiția III.2.2: *Fie* β *şi* γ *două numere complexe, fie funcția* $h \in \mathcal{H}(U)$ *şi fie funcția* $p \in \mathcal{H}(U)$*,* $p(z) = h(0) + p_1 z + \ldots$*, cu proprietatea* $p(0) = h(0)$*. Printr-o* ***subordonare diferențială de tip Briot – Bouquet*** *înțelegem o subordonare diferențială de forma:*

$$p(z) + \frac{z\,p'(z)}{\beta\,p(z) + \gamma} \prec h(z).$$

Lema III.2.1 [95]: *Funcția* $L(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \ldots$*, cu* $a_1(t) \neq 0$ *pentru* $t \geq 0$ *şi* $\lim_{t\to\infty}|a_1(t)| = \infty$*, este un lanț de subordonare dacă şi numai dacă există constantele* $r \in (0,1]$ *şi* $M > 0$ *astfel încât:*

a) *L(z,t) este analitică în discul* $|z|<r$ *pentru orice* $t\ge 0$*, este local absolut continuă pe* $[0,\infty)$ *pentru orice* $|z|<r$ *, şi verifică* $|L(z,t)|\le M|a_1(t)|$ *pentru* $|z|<r$ *şi* $t\ge 0$.

b) *Există o funcţie p(z,t) analitică în U pentru orice* $t\in[0,\infty)$ *şi măsurabilă pe* $[0,\infty)$ *pentru orice* $z\in U$*, astfel încât* $\mathrm{Re}\,p(z,t)>0$*,* $z\in U$*,* $t\ge 0$ *şi* $\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}=z\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial z}p(z,t)$ *pentru* $|z|<r$ *şi aproape peste tot pentru orice* $t\in[0,\infty)$.

Teorema III.2.1 [78,79]: *Fie* β *şi* γ *două numere complexe, cu* $\beta\ne 0$ *şi fie funcţia convexă h care verifică:*

$$\mathrm{Re}\big[\beta\,h(z)+\gamma\big]>0,\ z\in U.$$

Dacă funcţia $p\in\mathcal{H}\,[h(0),n]$*, atunci avem:*

$$p(z)+\frac{z\,p'(z)}{\beta\,p(z)+\gamma}\prec h(z)\quad\Rightarrow\quad p(z)\prec h(z).$$

Teorema III.2.4 [85]: *Fie* β *şi* γ *două numere complexe, cu* $\beta\ne 0$ *şi fie funcţia univalentă* $q\in\mathcal{H}_u(U)$*, cu* $q(0)=a$*, astfel încât* $\beta\,q(z)+\gamma\ne 0$*,* $z\in U$ *şi* $\mathrm{Re}\big[\beta\,q(0)+\gamma\big]>0$*. Vom nota:*

$$Q(z)=\frac{z\,q'(z)}{\beta\,q(z)+\gamma}\ \text{ şi }\ h(z)=q(z)+n\,Q(z)=q(z)+\frac{n\,z\,q'(z)}{\beta\,q(z)+\gamma}.$$

Presupunem că:

a) $\mathrm{Re}\dfrac{z\,h'(z)}{Q(z)}=\mathrm{Re}\left[\beta\,q(z)+\gamma+\dfrac{n\,z\,Q'(z)}{\beta\,Q(z)}\right]>0,\ z\in U$

şi

b) *h este convexă*

sau

b’) $\log[\beta\,q+\gamma]$ *este convexă* (*sau Q este stelată*).

Dacă $p\in\mathcal{H}\,[a,n]$ *verifică subordonarea diferenţială de tip Briot – Bouquet*

$$p(z)+\frac{z\,p'(z)}{\beta\,p(z)+\gamma}\prec h(z),\tag{III.2.10}$$

atunci $p(z)\prec q(z)$ *şi funcţia q este cea mai bună* (*a,n*) *dominantă a subordonării* (III.2.10). *Funcţia extremală este* $p(z)=q(z^n)$*, iar funcţia q este soluţia ecuaţia diferenţială de tip Briot – Bouquet.*

Teorema III.2.13 [78]: *Fie funcţia univalentă* $q\in\mathcal{H}_u(U)$ *şi fie funcţiile* $\theta,\phi\in\mathcal{H}(D)$*, unde* $D\supset q(U)$ *este un domeniu, astfel încât* $\phi(w)\ne 0$*,* $w\in q(U)$.

Să notăm $Q(z)=z\,q'(z)\,\phi\big(q(z)\big)$*,* $h(z)=\theta\big(q(z)\big)+Q(z)$ *şi să presupunem că:*

a) *h este convexă sau Q este stelată în U,*

b) $\mathrm{Re}\dfrac{z\,h'(z)}{Q(z)}=\mathrm{Re}\left[\dfrac{\theta'\big(q(z)\big)}{\phi\big(q(z)\big)}+\dfrac{z\,Q'(z)}{Q(z)}\right]>0,\ z\in U.$

Dacă funcţia $p\in\mathcal{H}(U)$*, cu* $p(0)=q(0)$ *şi* $p(U)\subset D$*, atunci avem:*

$$\theta\big(p(z)\big)+z\,p'(z)\,\phi\big(p(z)\big)\prec\theta\big(q(z)\big)+z\,q'(z)\,\phi\big(q(z)\big)=h(z)\tag{III.2.31}$$

implică $p(z)\prec q(z)$*, iar funcţia q este cea mai bună dominantă a subordonării* (III.2.31).

III.3. Aplicații ale subordonări diferențiale

În paragraf s-au determinat aplicații ale subordonărilor diferențiale, folosind funcția $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$. Rezultatele sunt originale şi sunt conținute în [57], [61].

Teorema III.3.1 [61]**:** *Fie* $q\in \mathcal{H}_u(U)$, $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$, *cu* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$ *şi fie* $\alpha\in(0,1]$, *astfel încât* $\dfrac{1-\alpha}{\alpha}+\dfrac{1+A}{1-A}>0$. *Dacă* $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=q(0)=1$ *şi*

$$(1-\alpha)p(z)+\alpha z p'(z)\prec(1-\alpha)\frac{1+Az}{1-Az}+\alpha\frac{2Az}{(1-Az)^2}, \text{ atunci } p(z)\prec q(z).$$

Teorema III.3.2 [61]**:** *Fie* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$ *şi fie* $\alpha\in(0,1]$, *astfel încât* $\dfrac{1-\alpha}{\alpha}+\dfrac{1+A}{1-A}>0$. *Dacă* $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=1$ *şi*

$$(1-\alpha)p(z)+\alpha z p'(z)\prec(1-\alpha)\frac{1+Az}{1-Az}+\alpha\frac{2Az}{(1-Az)^2}, \text{ atunci } \operatorname{Re}p(z)>0.$$

Teorema III.3.3 [61]**:** *Fie* $q\in\mathcal{H}_u(U)$, $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$, *cu* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$ *şi fie* $\alpha,\beta>0$, $\gamma\in(0,1]$, *astfel încât:*

$$\frac{2\alpha}{\gamma}\frac{1+A}{1-A}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{1+A}{1-A}>0. \tag{III.3.9}$$

Dacă $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=q(0)=1$ *şi*

$$\alpha p^2(z)+\beta p(z)+\gamma z p'(z)\prec\alpha\left(\frac{1+Az}{1-Az}\right)^2+\beta\frac{1+Az}{1-Az}+\gamma\frac{2Az}{(1-Az)^2}, \text{ atunci } p(z)\prec q(z).$$

Teorema III.3.4 [61]**:** *Fie* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$ *şi fie* $\alpha,\beta>0$, $\gamma\in(0,1]$, *astfel încât are loc relația* (III.3.9). *Dacă* $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=1$ *şi*

$$\alpha p^2(z)+\beta p(z)+\gamma z p'(z)\prec\alpha\left(\frac{1+Az}{1-Az}\right)^2+\beta\frac{1+Az}{1-Az}+\gamma\frac{2Az}{(1-Az)^2}, \text{ atunci } \operatorname{Re}p(z)>0.$$

Teorema III.3.5 [61]**:** *Fie* $q\in\mathcal{H}_u(U)$, $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$, *cu* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$ *şi fie* $\alpha>0$ *şi* $\beta\in(0,1]$, *astfel încât:*

$$\frac{1-A^2}{1-2A+A^2}+(\beta-1)\frac{2A-2A^3t}{1-2A^2+A^4}>0, \tag{III.3.16}$$

$$\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha}+\frac{1+A}{1-A}\left(\beta+1+\frac{1}{\alpha}\right)+(\beta-1)\frac{2A}{1-A^2}>0. \tag{III.3.17}$$

Dacă $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=q(0)=1$ *şi*

$$\left(p(z)\right)^{\beta}\left[(1-\alpha)+\alpha p(z)\right]+\alpha z p'(z)\left(p(z)\right)^{\beta-1} \prec \left(\frac{1+Az}{1-Az}\right)^{\beta}\left[(1-\alpha)+\alpha\frac{1+Az}{1-Az}\right]+\alpha\frac{2Az}{(1-Az)^2}\left(\frac{1+Az}{1-Az}\right)^{\beta-1}$$

atunci $p(z)\prec q(z)$.

Teorema III.3.6 [61]**:** *Fie* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$, fie $\alpha>0$ şi $\beta\in(0,1]$, *astfel încât sunt îndeplinite relațiile* (III.3.16) *şi* (III.3.17). *Dacă* $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=1$ *şi*

$$\left(p(z)\right)^{\beta}\left[(1-\alpha)+\alpha p(z)\right]+\alpha z p'(z)\left(p(z)\right)^{\beta-1} \prec \left(\frac{1+Az}{1-Az}\right)^{\beta}\left[(1-\alpha)+\alpha\frac{1+Az}{1-Az}\right]+\alpha\frac{2Az}{(1-Az)^2}\left(\frac{1+Az}{1-Az}\right)^{\beta-1},$$

atunci $\operatorname{Re} p(z)>0$.

Teorema III.3.7 [57]: *Dacă funcția* $f\in\mathcal{A}$, *atunci au loc următoarele implicații exacte:*

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\prec\frac{1+z}{1-z}\overset{(a)}{\Rightarrow}\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1}{1-z}\overset{(b)}{\Rightarrow}\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{1-z}.$$

Teorema III.3.8 [57]: *Dacă funcția* $f\in\mathcal{A}$ *şi* $0<A\le 1$, *atunci au loc următoarele implicații exacte:*

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\prec\frac{1+Az}{1-Az}\overset{(a)}{\Rightarrow}\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1}{1-Az}\overset{(b)}{\Rightarrow}\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{1-Az}.$$

Teorema III.3.9 [57]: *Dacă funcția* $f\in\mathcal{A}$, *atunci au loc următoarele implicații exacte:*

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\prec\frac{1+z}{1-z}\overset{(a)}{\Rightarrow}f'(z)\prec\frac{1}{(1-z)^2}\overset{(b)}{\Rightarrow}\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{1-z}.$$

Teorema III.3.10 [57]: *Dacă funcția* $f\in\mathcal{A}$ *şi* $0<A\le 1$, *atunci au loc următoarele implicații exacte:*

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\prec\frac{1+Az}{1-Az}\overset{(a)}{\Rightarrow}f'(z)\prec\frac{1}{(1-Az)^2}\overset{(b)}{\Rightarrow}\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{1-Az}.$$

III.4. Aplicații ale subordonărilor diferențiale de tip Briot - Bouquet

În paragraf s-au determinat aplicații ale subordonărilor diferențiale de tip Briot-Bouquet, folosind funcția $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$. Rezultatele sunt originale şi sunt conținute în [64].

Teorema III.4.1 [64]**:** *Fie* $q\in\mathcal{H}_u(U)$, $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$, *unde* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$. *Dacă* $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=q(0)=1$ *şi*

$$p(z)+\frac{zp'(z)}{p(z)}\prec\frac{1+Az}{1-Az}+\frac{2Az}{1-A^2z^2},\ \textit{atunci}\ p(z)\prec q(z).$$

Teorema III.4.2 [64]**:** *Fie* $q\in\mathcal{H}_u(U)$, $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$, *unde* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$. *Dacă* $p\in\mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0)=q(0)=1$ *şi*

$$p(z)+\frac{zp'(z)}{p(z)}\prec\frac{1+Az}{1-Az}+\frac{2Az}{1-A^2z^2},\ \textit{atunci}\ \operatorname{Re} p(z)>0.$$

Teorema III.4.3 [64]**:** *Fie* $A \in (-1,0) \cup (0,1)$ *şi fie funcţia* h *convexă în U, cu* $h(0)=1$. *Să presupunem că ecuaţie diferenţială:*

$$h(z) = q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)},\ z \in U. \tag{III.4.9}$$

are soluţia univalentă $q(z) = \dfrac{1+Az}{1-Az}$ *ce satisface* $q(0)=1$ *şi* $h(z) \prec q(z)$.

Dacă $f \in \mathcal{A}$ *şi* $\dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}$ *este univalentă,* $\dfrac{z\,F'(z)}{F(z)} \in \mathcal{H}[1,1] \cap \mathcal{Q}$ *şi*

$$\frac{z\,f'(z)}{f(z)} \prec h(z),\ z \in U,\ \text{atunci}\ \frac{z\,F'(z)}{F(z)} \prec q(z),\ z \in U,$$

unde

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt. \tag{III.4.12}$$

Teorema III.4.4 [64]**:** *Fie* $A \in (-1,0) \cup (0,1)$ *şi fie funcţia h definită de relaţia* (III.4.9). *Dacă* $f \in \mathcal{A}$ *şi* $\dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}$ *este univalentă,* $\dfrac{z\,F'(z)}{F(z)} \in \mathcal{H}\,[1,1] \cap \mathcal{Q}$ *şi*

$$\frac{z\,f'(z)}{f(z)} \prec h(z),\ z \in U,\ \text{atunci}\ \operatorname{Re}\frac{z\,F'(z)}{F(z)} > 0,\ z \in U,$$

unde funcţia F *este definită de relaţia* (III.4.12).

Teorema III.4.5 [64]: *Fie* $q \in \mathcal{H}_u(U)$, $q(z) = \dfrac{1+Az}{1-Az}$, *cu* $A \in (-1,0) \cup (0,1)$*, astfel încât:*

$$1 + \frac{A}{1-A} - \frac{A(1-\gamma)}{1+\gamma+A-A\gamma} > 0, \tag{III.4.19}$$

$$\frac{1}{(1-A)(1+\gamma+A-A\gamma)} > 0, \tag{III.4.20}$$

$$(1+\gamma)^2 - 2A\gamma(1+\gamma) + 2A^3\gamma(\gamma-1) - A^4(\gamma-1)^2 > 0. \tag{III.4.21}$$

Dacă $p \in \mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0) = q(0) = 1$ *şi*

$$p(z) + \frac{z\,p'(z)}{p(z)+\gamma} \prec \frac{1+Az}{1-Az} + \frac{2Az}{(1-Az)(1+\gamma+Az-A\gamma z)},\ \text{atunci}\ p(z) \prec q(z).$$

Teorema III.4.6 [64]**:** *Fie* $q \in \mathcal{H}_u(U)$, $q(z) = \dfrac{1+Az}{1-Az}$, *cu* $A \in (-1,0) \cup (0,1)$ *şi sunt îndeplinite relaţiile* (III.4.19), (III.4.20) *şi* (III.4.21). *Dacă* $p \in \mathcal{H}(U)$, *cu* $p(0) = q(0) = 1$ *şi*

$$p(z) + \frac{z\,p'(z)}{p(z)+1} \prec \frac{1+Az}{1-Az} + \frac{2Az}{(1-Az)(1+\gamma+Az-A\gamma z)},\ \text{atunci}\ \operatorname{Re} p(z) > 0.$$

Teorema III.4.7 [64]: *Fie* $A \in (-1,0) \cup (0,1)$ *şi fie funcţia* h *convexă în U, cu* $h(0)=1$. *Să presupunem că ecuaţie diferenţială:*

$$h(z) = q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)+\gamma},\ z \in U. \tag{III.4.29}$$

are soluția univalentă $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$ *care satisface condițiile* $q(0)=1$ *şi* $h(z)\prec q(z)$. *Dacă* $f\in\mathcal{A}$ *şi* $\dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}$ *este univalentă,* $\dfrac{z\,F'(z)}{F(z)}\in\mathcal{H}\,[1,1]\cap\mathcal{Q}$ *şi*

$$\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\prec h(z),\ z\in U,\ \textit{atunci}\ \frac{z\,F'(z)}{F(z)}\prec q(z),\ z\in U,$$

unde

$$F(z)=\frac{\gamma+1}{z^{\gamma}}\int_0^z f(t)\,t^{\gamma-1}\,dt. \tag{III.4.32}$$

Teorema III.4.8 [64]**:** *Fie* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$ *şi fie funcția h definită de relația* (III.4.29). *Dacă* $f\in\mathcal{A}$ *şi* $\dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}$ *este univalentă,* $\dfrac{z\,F'(z)}{F(z)}\in\mathcal{H}\,[1,1]\cap\mathcal{Q}$ *şi*

$$\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\prec h(z),\ z\in U,\ \textit{atunci}\quad \mathrm{Re}\frac{z\,F'(z)}{F(z)}>0,\ z\in U,$$

unde unde funcția F este definită de relația (III.4.32).

III.5. Superordonări diferențiale

Metoda superordonărilor diferențiale a fost introdusă de S. S. Miller şi P. T. Mocanu în articolul „Subordinants of Differential Superordinations" [86]. Utilizarea acestei metode a permis obținerea unor rezultate noi în teoria geometrică a funcțiilor analitice.

Definiția III.5.1: *Fie* f *şi* F *două funcții olomorfe în* U. *Spunem că funcția f este* ***subordonată*** *lui F, sau că F este* ***superordonată*** *lui f, dacă există o funcție w, analitică în U, cu* $w(0)=0$ *şi* $|w(z)|<1$, *astfel încât* $f(z)=F\big(w(z)\big)$. *În acest caz scriem* $f\prec F$ *sau* $f(z)\prec F(z)$. *Dacă funcția F este univalentă, atunci* $f\prec F$ *dacă şi numai dacă* $f(0)=F(0)$ *şi* $f(U)\subset F(U)$.

Definiția III.5.2: *Fie* $\varphi:\mathbb{C}^3\times U\to\mathbb{C}$ *şi fie funcția h univalentă în discul unitate U. Dacă funcția* $p\in\mathcal{H}\,[a,n]$ *verifică subordonarea diferențială:*

$$h(z)\prec\varphi\Big(p(z),z\,p'(z),z^2\,p''(z);z\Big),\quad z\in U, \tag{III.5.4}$$

atunci funcția p se numeşte **(*a, n*)** ***soluție a superordonării diferențiale*** (III.5.4).

Definiția III.5.3: *Superordonarea din relația* (III.5.4) *se numeşte* ***superordonare diferențială de ordinul doi,*** *iar funcția q univalentă în U, se numeşte* **(*a, n*)** ***subordonantă a soluțiilor superordonării diferențiale*** *a relației* (III.5.4).

Definiția III.5.4: *Fie* $\varphi:\mathbb{C}^3\times U\to\mathbb{C}$ *şi fie funcția h univalentă în discul unitate U. Dacă p este o funcție analitică în discul unitate U şi verifică superordonarea diferențială din relația* (III.5.4), *atunci funcția p se numeşte* ***soluție a superordonării diferențiale***.

Definiția III.5.5: *Funcția univalentă q se numeşte* ***o subordonantă a superordonării diferențiale*** *din relația* (III.5.4), *dacă* $q\prec p$, *pentru orice p care satisface relația* (III.5.4).

Definiția III.5.6: *O subordonantă* $\tilde{q}$ *astfel încât* $q(z)\prec\tilde{q}(z)$ *oricare ar fi subordonata q pentru relația* (III.5.4) *se numeşte* ***cea mai bună subordonantă***.

Definiția III.5.7 [77, 81]: *Fie mulțimea* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, fie funcția* $q \in \mathcal{H}[a,n]$ *şi* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. *Vom nota cu* $\Phi_n[\Omega, q]$ *clasa funcțiilor* $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ *care satisfac condiția* $\varphi(r,s,t;\zeta) \in \Omega$*, atunci când:*

$$r = q(z),\, s = \frac{z\,q'(z)}{m},\ \ \mathrm{Re}\frac{t}{s} + 1 \leq \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left[\frac{z\,q''(z)}{q'(z)} + 1\right],$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U$ *şi* $m \geq n$. *Mulțimea* $\Phi_n[\Omega, q]$ *se numeşte* ***clasa funcțiilor admisibile****, iar condiția* $\varphi(r,s,t;z) \in \Omega$ *se numeşte* ***condiție de admisibilitate****.*

Teorema III.5.1 [85]: *Fie* $\Omega \subset \mathbb{C}, q \in \mathcal{H}[a,n]$ *şi fie* $\varphi \in \Phi_n[\Omega, q]$*, unde q(0) = a. Dacă funcția* $p \in \mathcal{Q}(a)$ *şi* $\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\, p''(z); z\right)$ *este o funcție univalentă în discul unitate U, atunci*

$$\Omega \subset \left\{\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\, p''(z); z\right), z \in U\right\} \Rightarrow q(z) \prec p(z).$$

Teorema III.5.2 [56]: *Fie* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, fie* $q \in \mathcal{H}[a,n]$*, cu q(0) = a şi fie* $\varphi \in \Phi_n\left[\Omega, q_\rho\right]$*, pentru un anumit* $\rho \geq 1$*, unde* $q_\rho(z) = q(\rho z)$. *Dacă funcția* $p \in \mathcal{Q}(a)$ *şi* $\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\, p''(z); z\right)$ *este o funcție univalentă în discul unitate U, atunci*

$$\Omega \subset \left\{\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right); z \in U\right\} \Rightarrow q(z) \prec p(z)\ .$$

Teorema III.5.3 [86]: *Fie* $q \in \mathcal{H}[a,n]$ *şi fie h analitică în U şi fie* $\varphi \in \Phi_n[h, q]$. *Dacă funcția* $p \in \mathcal{Q}(a)$ *şi funcția* $\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\, p''(z); z\right)$ *este univalentă în discul unitate* U*, atunci*

$$h(z) \prec \varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \Rightarrow q(z) \prec p(z)\ .$$

Teorema III.5.4 [56]: *Fie* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, fie funcțiile* $h, q \in \mathcal{H}[a,n]$*, cu q(0) = a şi notăm* $h_\rho(z) = h(\rho z)$, $q_\rho(z) = q(\rho z)$. *Fie funcția* $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$*, cu* $\varphi(a,0,0;0) = h(0)$ *care verifică una din următoarele condiții:*

a) $\varphi \in \Phi_n\left[\Omega, q_\rho\right]$*, pentru un anumit* $\rho \geq 1$*,*

sau

b) *există un* $\rho_0 \geq 1$ *astfel încât* $\varphi \in \Phi_n\left[h_\rho, q_\rho\right]$ *pentru orice* $\rho \in (1, \rho_0)$.

Dacă funcția $p \in \mathcal{Q}(a)$ *şi funcția* $\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\, p''(z); z\right)$ *este univalentă în discul unitate U, atunci*

$$h(z) \prec \varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \Rightarrow q(z) \prec p(z)\ .$$

Teorema III.5.5 [86]: *Fie h o funcție analitică în U şi fie* $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. *Presupunem că ecuația diferențială:*

$$\varphi\left(q(z), z\,q'(z), z^2 q''(z); z\right) = h(z)$$

are o soluție $q \in \mathcal{Q}$ *(a). Dacă* $\varphi \in \Phi[h, q]$, $p \in \mathcal{Q}$ *(a)* şi $\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right)$ *este univalentă în U, atunci*

$$h(z) \prec \varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \Rightarrow q(z) \prec p(z)\ .$$

şi funcția q este cea mai bună subordonantă .

Teorema III.5.6 [56]: *Fie funcția univalentă* $h \in \mathcal{H}_u(U)$ *şi fie* $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. *Presupunem că ecuația diferențială:*

$$\varphi\left(q(z),\ z\,q'(z), z^2 q''(z); z\right) = h(z)$$

are o soluție q, cu q(0) = *a, şi că una din din următoarele condiții este verificată:*

a) $q \in \mathcal{Q}$ *şi* $\varphi \in \Phi\left[h, q\right]$,

b) *q este univalentă în U şi* $\varphi \in \Phi\left[h, q_\rho\right]$, *pentru un anumit* $\rho \geq 1$,

c) *q este univalentă în U şi există un* $\rho_0 \geq 1$, *astfel încât* $\varphi \in \Phi\left[h_\rho, q_\rho\right]$ *pentru orice* $\rho \in \left(1, \rho_0\right)$.

Dacă funcția $p \in \mathcal{Q}(a)$ *şi funcția* $\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\,p''(z); z\right)$ *este univalentă în discul unitate U, atunci*

$$h(z) \prec \varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \Rightarrow q(z) \prec p(z)\ .$$

şi funcția q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.5.7 [56]: *Fie funcția univalentă* $h \in \mathcal{H}_u(U)$ *şi fie* $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. *Presupunem că ecuația diferențială:*

$$\varphi\left(q(z), n\,z\,q'(z), n\left(n-1\right) z\,q'(z) + n^2 z^2 q''(z); z\right) = h(z)$$

are o soluție q, cu q(0) = *a, şi că una din următoarele condiții este verificată:*

a) $q \in \mathcal{Q}$ *şi* $\varphi \in \Phi_n\left[h, q\right]$,

b) *q este univalentă în U şi* $\varphi \in \Phi_n\left[h, q_\rho\right]$, *pentru un anumit* $\rho \geq 1$,

c) *q este univalentă în U şi există un* $\rho_0 \geq 1$, *astfel încât* $\varphi \in \Phi_n\left[h_\rho, q_\rho\right]$ *pentru orice* $\rho \in \left(1, \rho_0\right)$.

Dacă funcția $p \in \mathcal{Q}(a)$ *şi funcția* $\varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2\,p''(z); z\right)$ *este univalentă în discul unitate U, atunci*

$$h(z) \prec \varphi\left(p(z), z\,p'(z), z^2 p''(z); z\right) \Rightarrow q(z) \prec p(z)$$

şi funcția q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.5.15 [13,15]: *Fie q o funcție convexă* (*univalentă*) *pe discul unitate U, fie funcțiile* ϑ *şi* φ *analitice în domeniul D conținut în* $q(U)$ *şi fie* $\mu \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. *Presupunem că are loc inegalitatea:*

$$\operatorname{Re}\frac{\vartheta'\left(q(z)\right) + \varphi'\left(q(z)\right)\mu\left(t\,z\,q'(z)\right)}{\varphi\left(q(z)\right)\mu'\left(t\,z\,q'(z)\right)} > 0,\ z \in U,\ t \geq 0.$$

Dacă $p \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, *cu* $p(0) = q(0)$, $p(U) \subset D$ *şi* $\vartheta\left(p(z)\right) + \mu\left(z\,p'(z)\right)\varphi\left(p(z)\right)$ *este univalentă în U, şi*

$$\vartheta\left(q(z)\right) + \mu\left(t\,z\,q'(z)\right)\varphi\left(q(z)\right) \prec \vartheta\left(p(z)\right) + \mu\left(z\,p'(z)\right)\varphi\left(p(z)\right)$$

atunci $q(z) \prec p(z)$. *Funcția q este cea mai bună subordonantă.*

Corolarul III.5.6 [13]: *Fie q o funcție convexă* (*univalentă*) *pe discul unitate U, fie funcția* φ *analitică în domeniul D conținut în* $q(U)$ *şi fie* $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. *Presupunem că au loc relațiile:*

a) $\xi(z) = z\,q'(z)\,\varphi\big(q(z)\big)$ *este stelată în U,*

b) $\operatorname{Re}\dfrac{\vartheta'\big(q(z)\big)}{\varphi\big(q(z)\big)} > 0,\ z \in U$.

Dacă $p \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, *cu* $p(0) = q(0)$, $p(U) \subset D$ *şi* $\vartheta\big(p(z)\big) + z\,p'(z)\,\varphi\big(p(z)\big)$ *este univalentă în U, şi*

$$\vartheta\big(q(z)\big) + z\,g'(z)\varphi\big(z\,q'(z)\big) \prec \vartheta\big(p(z)\big) + z\,p'(z)\,\varphi\big(p(z)\big)$$

atunci $q(z) \prec p(z)$. *Funcţuia q cea mai bună subordonantă.*

Teorema III.5.16: *Fie* $q \in \mathcal{H}_u(U)$ *şi fie funcţiile* ϑ *şi* φ *analitice în domeniul D conţinut în* $q(U)$, *cu* $\varphi(w) \neq 0$, *unde* $w \in q(U)$. *Fie* $\xi(z) = z\,q'(z)\,\varphi\big(q(z)\big)$, $l(z) = \vartheta\big(q(z)\big) + \xi(z)$ *şi presupunem că au loc relaţiile:*

a) ξ *este stelată,*

b) $\operatorname{Re}\dfrac{z\,l'(z)}{\xi(z)} = \operatorname{Re}\left[\dfrac{\vartheta'\big(q(z)\big)}{\varphi\big(q(z)\big)} + \dfrac{z\,\xi'(z)}{\xi(z)}\right] > 0,\ z \in U$.

Dacă $p \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, *cu* $p(0) = q(0)$, $p(U) \subset D$ *şi* $\vartheta\big(p(z)\big) + z\,p'(z)\,\varphi\big(p(z)\big)$ *este univalentă în U şi*

$$\vartheta\big(q(z)\big) + z\,q'(z)\,\varphi\big(q(z)\big) \prec \vartheta\big(p(z)\big) + z\,p'(z)\,\varphi\big(p(z)\big),$$

atunci $q(z) \prec p(z)$. *Funcţuia q cea mai bună subordonantă.*

III.6. Superordonări diferenţiale de tip Briot-Bouquet

Definiţia III.6.1: *Fie* β *şi* γ *două numere complexe, fie funcţia* $h \in \mathcal{H}(U)$ *şi fie funcţia* $p \in \mathcal{H}(U)$, $p(z) = h(0) + p_1 z + \ldots$, *cu proprietatea* $p(0) = h(0)$. *Printr-o* ***superordonare diferenţială de tip Briot – Bouquet*** *înţelegem o subordonare diferenţială de forma:*

$$h(z) \prec p(z) + \frac{z\,p'(z)}{\beta\,p(z) + \gamma}.$$

Teorema III.6.1 [87]: *Fie h o funcţie convexă în U, cu* $h(0) = a$, *şi fie funcţiile* Θ *şi* Φ *analitice în domeniul D. Fie* $p \in \mathcal{H}\,[a,1] \cap \mathcal{Q}$ *şi presupunem că* $\Theta\big(p(z)\big) + z\,p'(z)\,\Phi\big(p(z)\big)$ *este univalentă în U. Dacă ecuaţia diferenţială:*

$$\Theta\big(q(z)\big) + z\,q'(z)\,\Phi\big(q(z)\big) = h(z)$$

are soluţia univalentă q, $q(0) = a$, $q(U) \subset D$ *şi*

$$\Theta\big(q(z)\big) \prec h(z),$$

atunci

$$h(z) \prec \Theta\big(p(z)\big) + z\,p'(z)\,\Phi\big(p(z)\big) \ \Rightarrow\ q(z) \prec p(z).$$

Funcţia q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.6.3 [87]: *Fie funcţiile* Θ *şi* Φ *analitice în domeniul D şi fie q o funcţie univalentă în U, cu* $q(0) = a$, $q(U) \subset D$. *Fie* $Q(z) = z\,q'(z)\,\Phi\big(q(z)\big)$, $h(z) = Q(z) + \Theta\big(q(z)\big)$ *şi presupunem că*

a) $Q(z)$ *este stelată,*

b) $\operatorname{Re}\dfrac{\Theta'\left(q(z)\right)}{\Phi\left(q(z)\right)}>0$.

Dacă $p\in \mathcal{H}[a,1]\cap \mathcal{Q}$, $p(U)\subset D$ *şi presupunem că* $\Theta\left(p(z)\right)+z\,p'(z)\Phi\left(p(z)\right)$ *este univalentă în U, atunci*

$$h(z)\prec \Theta\left(p(z)\right)+z\,p'(z)\Phi\left(p(z)\right) \;\Rightarrow\; q(z)\prec p(z).$$

Funcția q este cea mai bună subordonantă.

III.7. Aplicații ale superordonărilor diferențiale de tip Briot-Bouquet obținute cu ajutorul operatorilor integrali

În paragraf s-au determinat aplicații ale superordonărilor diferențiale de tip Briot-Bouquet cu ajutorul operatorilor integrali. Rezultatele sunt originale şi sunt conținute în [54], [55], [58].

Teorema III.7.1 [54]: *Fie* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$. *Funcția*

$$h(z)=\frac{1+Az}{1-Az}+\frac{Az}{1-Az},\; z\in U.$$

este convexă.

Teorema III.7.2 [55]: *Fie* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$ *şi funcția h convexă în U, cu* $h(0)=1$. *Presupunem că avem ecuația diferențială:*

$$h(z)=q(z)+\frac{z\,q'(z)}{q(z)+1},\; z\in U$$

cu soluția univalentă $q(z)=\dfrac{1+Az}{1-Az}$ *ce satisface* $q(0)=1$ *şi* $q(z)\prec h(z)$. *Dacă* $f\in\mathcal{A}$ *şi* $\dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}$ *este univalentă,* $\dfrac{z\,F'(z)}{F(z)}\in\mathcal{H}[1,1]\cap\mathcal{Q}$ *şi*

$$h(z)\prec\frac{z\,f'(z)}{f(z)},\; z\in U,\ \textit{atunci}\ q(z)\prec\frac{z\,F'(z)}{F(z)},\; z\in U,$$

unde

$$F(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt. \qquad \text{(III.7.10)}$$

Corolarul III.7.1 [55]: *Fie* $A\in(-1,0)\cup(0,1)$. *Dacă* $f_1,f_2\in\mathcal{A}$, $\dfrac{z\,f_1'(z)}{f_1(z)}$ *şi* $\dfrac{z\,f_2'(z)}{f_2(z)}$ *sunt univalente,* $\dfrac{z\,F_1'(z)}{F_1(z)},\dfrac{z\,F_2'(z)}{F_2(z)}\in\mathcal{H}[a,1]\cap\mathcal{Q}$ *şi*

$$\frac{z\,f_1'(z)}{f_1(z)}\prec\frac{1+Az}{1-Az}+\frac{Az}{1-Az}\prec\frac{z\,f_2'(z)}{f_2(z)},\; z\in U,\ \textit{atunci}\ \frac{z\,F_1'(z)}{F_1(z)}\prec\frac{1+Az}{1-Az}\prec\frac{z\,F_2'(z)}{F_2(z)},\; z\in U,$$

unde

$$F_i(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f_i(t)dt,\; i=\overline{1,2}. \qquad \text{(III.7.11)}$$

Teorema III.7.3 [58]: *Fie* $a\in A_0$, *unde* $A_0=(-\infty,-4.5115...)\cup(0.7571...,+\infty)$. *Funcția*

$$h(z) = z + a + \frac{z}{z+a+1}, \ z \in U$$

este convexă.

Teorema III.7.4 [58]: *Fie* $a \in A_0$ *şi fie* h *o funcţie convexă în U, cu* $h(0) = a$. *Presupunem că ecuaţia diferenţială:*

$$h(z) = q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)+1}, \ z \in U$$

are soluţia univalentă $q(z) = z + a$ *ce satisface* $q(0) = a$ *şi* $q(z) \prec h(z)$. *Dacă* $f \in \mathcal{A}$ *şi* $\frac{z\,f'(z)}{f(z)}$ *este univalentă,* $\frac{z\,F'(z)}{F(z)} \in \mathcal{H}[a,1] \cap \mathcal{Q}$ *şi*

$$h(z) \prec \frac{z\,f'(z)}{f(z)}, \ z \in U, \text{ atunci } q(z) \prec \frac{z\,F'(z)}{F(z)}, \ z \in U,$$

unde funcţia F *este definită de relaţia* (III.5.10).

Corolarul III.7.2 [58]: *Fie* $a \in A_0$. *Dacă* $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$, $\frac{z\,f_1'(z)}{f_1(z)}$ *şi* $\frac{z\,f_2'(z)}{f_2(z)}$ *sunt univalente,* $\frac{z\,F_1'(z)}{F_1(z)}, \frac{z\,F_2'(z)}{F_2(z)} \in \mathcal{H}[a,1] \cap \mathcal{Q}$ *şi*

$$\frac{z\,f_1'(z)}{f_1(z)} \prec z + a + \frac{z}{z+a+1} \prec \frac{z\,f_2'(z)}{f_2(z)}, \ z \in U, \text{ atunci } \frac{z\,F_1'(z)}{F_1(z)} \prec z + a \prec \frac{z\,F_2'(z)}{F_2(z)}, \ z \in U,$$

unde F_i, $i = \overline{1,2}$, *este definită de relaţia* (III.5.11).

III.8. Aplicaţii ale subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale, teoreme "sandwich"

În paragraf s-au determinat aplicaţii ale subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale.Rezultatele sunt originale şi sunt conţinute în [63], [65], [66].

Teorema III.8.1 [63]: *Fie funcţia* q *convexă în U şi presupunem că* $\mathrm{Re}\,q(z) > \beta$. *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k \in \mathbb{N}$ *şi* $\alpha > 0$. *Presupunem că funcţia* q *satisface relaţia:*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{z\,q''(z)}{g'(z)} + q(z) - \beta + 1\right] > 0. \qquad \text{(III.8.1)}$$

Dacă

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{2\alpha} - (\alpha k + \beta)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha\frac{f'(z)}{z^{k-1}}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1} \prec \frac{q^2(z)}{2} - \beta\,q(z) + z\,q'(z),$$

atunci

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q(z).$$

Funcţia q *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.8.2 [63]: *Fie funcția* q *convexă în* U *şi presupunem că* $\operatorname{Re} q(z) > \beta$. *Fie* $f \in \mathcal{A}$ (k,n) , $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $\alpha > 0$ *şi fie*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{2\alpha} - (\alpha k + \beta)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha \frac{f'(z)}{z^{k-1}}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}$$

o funcție univalentă în U. *Presupunem că funcția* q *satisface relația:*

$$\operatorname{Re}\left[q(z)q'(z) - \beta q'(z)\right] > 0. \tag{III.8.4}$$

Dacă

$$\frac{q^2(z)}{2} - \beta q(z) + z\,q'(z) \prec \frac{1}{2}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{2\alpha} - (\alpha k + \beta)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha \frac{f'(z)}{z^{k-1}}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1},$$

atunci

$$q(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorem III.8.3 [63]: *Fie funcțiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în* U *şi presupunem că* $\operatorname{Re} q(z) > \beta$. *Fie* $f \in \mathcal{A}$ (k,n) , $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $\alpha > 0$ *şi fie*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{2\alpha} - (\alpha k + \beta)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha \frac{f'(z)}{z^{k-1}}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}$$

univalentă în U. *Presupunem că funcția* q_1 *satisface relația* (III.8.4) *şi funcția* q_2 *satisface relația* (III.8.1). *Dacă*

$$\frac{q_1^{\,2}(z)}{2} - \beta q_1(z) + z\,q_1'(z) \prec \frac{1}{2}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{2\alpha} - (\alpha k + \beta)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha \frac{f'(z)}{z^{k-1}}\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}$$
$$\prec \frac{q_2^{\,2}(z)}{2} - \beta q_2(z) + z\,q_2'(z),$$

atunci

$$q_1(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.8 [65]: *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie funcția* q *convexă în* U *şi presupunem că funcția q satisface relația:*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z\,q''(z)}{g'(z)} + \frac{\alpha}{\gamma} + 1\right] > 0. \tag{III.8.7}$$

Dacă

$$\gamma\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}} + (1-\gamma k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q(z) + \frac{\gamma\,z\,q'(z)}{\alpha},$$

atunci

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.8.5 [65]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k \in \mathbb{N}$, *fie funcţia* q *convexă în* U *şi fie* $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $\gamma > 0$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie*

$$\gamma\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}} + (1-\gamma k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

univalentă în U . *Presupunem că funcţia* q *satisface relaţia*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\gamma\, q'(z)}{\alpha}\right] > 0. \tag{III.8.10}$$

Dacă

$$q(z) + \frac{\gamma\, z\, q'(z)}{\alpha} \prec \gamma\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}} + (1-\gamma k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha},$$

atunci

$$q(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.8.6 [65]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap Q$, $k \in \mathbb{N}$ $\gamma > 0$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie*

$$\gamma\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}} + (1-\gamma k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

univalentă în U . *Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că funcţia* q_1 *satisface relaţia* (III.8.10) *şi* q_2 *satisface relaţia* (III.8.7). *Dacă*

$$q_1(z) + \frac{\gamma\, z\, q_1'(z)}{\alpha} \prec \gamma\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}} + (1-\gamma k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q_2(z) + \frac{\gamma\, z\, q_2'(z)}{\alpha},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.8.7 [66]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie funcţia q univalentă în U şi presupunem că această funcţie satisface relaţia*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z\, q''(z)}{g'(z)} - \frac{z\, q'(z)}{q(z)} + 1\right] > 0. \tag{III.8.13}$$

Dacă

$$1 + \alpha\gamma\frac{z\, f'(z)}{f(z)} - \alpha k\gamma \prec 1 + \frac{\gamma\, z\, q'(z)}{q(z)},$$

atunci

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.8.8 [66]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $k \in \mathbb{N}$ $\gamma > 0$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie*

$$1+\alpha\gamma\frac{z f'(z)}{f(z)}-\alpha k\gamma$$

univalentă în U . *Fie* q *o funcţie convexă în* U *şi presupunem că această funcţie satisface relaţia* (III.7.13). *Dacă*

$$1+\frac{\gamma z q'(z)}{q(z)} \prec 1+\alpha\gamma\frac{z f'(z)}{f(z)}-\alpha k\gamma ,$$

atunci

$$q(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.8.9 [66]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie* $1+\alpha\gamma\frac{z f'(z)}{f(z)}-\alpha k\gamma$ *univalentă în* U . *Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în* U *şi presupunem că satisfac relaţia* (III.8.13). *Dacă*

$$1+\frac{\gamma z q_1'(z)}{q_1(z)} \prec 1+\alpha\gamma\frac{z f'(z)}{f(z)}-\alpha k\gamma \prec 1+\frac{\gamma z q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q_2(z),$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.810 [66]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k \in \mathbb{N}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie funcţia* q *univalentă în* U *şi presupunem că satisface relaţiile:*

$$\operatorname{Re} q(z) > 0 \tag{III.8.18}$$

şi

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z q''(z)}{g'(z)}-\frac{z q'(z)}{q(z)}+1\right] > 0 . \tag{III.8.19}$$

Dacă

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha\gamma\frac{z f'(z)}{f(z)}-\alpha k\gamma \prec q(z)+\frac{z q'(z)}{q(z)},$$

atunci

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q(z) ,$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.8.11 [66]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}\ (k,n)$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $k \in \mathbb{N}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie*

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha\gamma \frac{z\,f'(z)}{f(z)} - \alpha k\gamma$$

univalentă în U . *Fie funcția q convexă în U. Presupunem că funcția q satisface relațiile* (III.8.19) *şi*

$$\mathrm{Re}\left[q(z)g'(z)\right] > 0. \qquad \text{(III.8.22)}$$

Dacă

$$q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)} \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha \frac{z\,f'(z)}{f(z)} - \alpha k,$$

atunci

$$q(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.8.12 [66]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}\ (k,n)$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $k \in \mathbb{N}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie*

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha \frac{z\,f'(z)}{f(z)} - \alpha k$$

univalentă în U . *Fie funcțiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că funcția* q_1 *satisface relațiile* (III.8.19) şi (III.8.22), iar *funcția* q_2 *satisface relațiile* (III.8.18) şi (III.8.19). *Dacă*

$$q_1(z) + \frac{z\,q_1'(z)}{q_1(z)} \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} + \alpha\gamma \frac{z\,f'(z)}{f(z)} - \alpha k\gamma \prec q_2(z) + \frac{z\,q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q_2(z),$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.8.13 [65]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}\ (k,n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie funcția q convexă în U. Dacă*

$$\alpha\lambda\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1} \frac{f'(z)}{z^{k-1}} + (1-\lambda-\alpha\lambda k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec (1-\lambda)q(z) + \lambda z\,q'(z),$$

atunci

$$\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha} \prec q(z),$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.8.14 [65]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}\ (k,n)$, $\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\in\mathcal{H}\,[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$ *şi* $\alpha>0$. *Fie*

$$\alpha\lambda\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}}+(1-\lambda-\alpha\lambda k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

o funcţie univalentă în U. Fie funcţia q convexă în U. Presupunem că q satisface relaţia:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(1-\lambda)\,q'(z)}{\lambda}\right]>0. \tag{III.8.27}$$

Dacă

$$(1-\lambda)q(z)+\lambda z\,q'(z)\prec\alpha\lambda\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}}+(1-\lambda-\alpha\lambda k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha},$$

atunci

$$q(z)\prec\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.8.15 [65]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}\ (k,n)$, $\mathcal{H}\,[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$ *şi* $\alpha>0$. *Fie*

$$\alpha\lambda\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}}+(1-\lambda-\alpha\lambda k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

univalentă în U . *Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U şi presupunem că funcţia* q_1 *satisface relaţia* (III.8.27). *Dacă*

$$(1-\lambda)q_1(z)+\lambda z\,q_1'(z)\prec\alpha\lambda\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha-1}\frac{f'(z)}{z^{k-1}}+(1-\lambda-\alpha\lambda k)\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\prec(1-\lambda)q_2(z)+\lambda z\,q_2'(z),$$

atunci

$$q_1(z)\prec\left(\frac{f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

III.9. Subordonări şi superordonări diferenţiale pentru funcţii analitice definite cu ajutorul operatorului liniar Ruscheweyh

În [59] şi [67] autorul obţine noi subordonări şi superordonări diferenţiale folosind operatorul liniar Ruscheweyh. Aceste rezultate sunt originale.

Definim operatorul Ruscheweyh $R^m:\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}_n$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$R^0 f(z)=f(z)$$

$$R^1 f(z)=z\,f'(z)$$

$$(m+1)R^{m+1}f(z)=z\left[R^m f(z)\right]'+m\,R^m f(z),\quad z\in U.$$

Dacă $f\in\mathcal{A}_n$, atunci avem: $R^m f(z)=z+\sum_{j=n+1}^{\infty}C_{m+j-1}^{m}\,a_j\,z^j$.

Teorema III.9.1 [59]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie q o funcţie univalentă în U şi presupunem că satisface condiţiile:*

$$\operatorname{Re} q(z) > 0 \tag{III.9.1}$$

şi

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z\,q''(z)}{g'(z)} - \frac{z\,q'(z)}{q(z)} + 1\right] > 0 . \tag{III.9.2}$$

Dacă

$$\left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} + \alpha\frac{(m+1)R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)} - \alpha\left(m+1\right) \prec q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)},$$

atunci

$$\left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} \prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.9.2 [59]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $\left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie* $\left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} + \alpha\frac{(m+1)R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)} - \alpha\left(m+1\right)$ *univalentă în U. Fie funcţia q convexă în U şi presupunem că satisface relaţiile* (III.9.2) şi

$$\operatorname{Re}\left[q(z)g'(z)\right] > 0 \tag{III.9.5}$$

Dacă

$$q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)} \prec \left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} + \alpha\frac{(m+1)R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)} - \alpha\left(m+1\right) ,$$

atunci

$$q(z) \prec \left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.9.3 [59]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $\left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}\,[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie* $\left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} + \alpha\frac{(m+1)R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)} - \alpha\left(m+1\right)$ *univalentă în U. Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că funcţia* q_1 *satisface relaţiile* (III.9.2) şi (III.9.5), iar *funcţia* q_2 *satisface relaţiile* (III.9.1) şi (III.9.2). *Dacă*

$$q_1(z) + \frac{z\,q_1'(z)}{q_1(z)} \prec \left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} + \alpha\frac{(m+1)R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)} - \alpha\left(m+1\right) \prec q_2(z) + \frac{z\,q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \left(\frac{R^m f(z)}{z}\right)^{\alpha} \prec q_2(z),$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.9.4 [59]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie q o funcţie univalentă în U şi presupunem că satisface condiţiile* (III.9.1) şi (III.9.2). *Dacă*

$$\frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\left[\frac{R^{m+2} f(z)}{R^{m+1} f(z)} - 1\right] + \alpha(m+1)\left[1 - \frac{R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)}\right] \prec q(z) + \frac{z q'(z)}{q(z)},$$

atunci

$$\frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \prec q(z),$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.9.5 [59]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $\frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap Q$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$.

Fie $\frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\left[\frac{R^{m+2} f(z)}{R^{m+1} f(z)} - 1\right] + \alpha(m+1)\left[1 - \frac{R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)}\right]$ *univalentă în U. Fie funcţia q convexă în U şi presupunem că satisface relaţiile* (III.9.2) şi (III.9.5). *Dacă*

$$q(z) + \frac{z q'(z)}{q(z)} \prec \frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\left[\frac{R^{m+2} f(z)}{R^{m+1} f(z)} - 1\right] + \alpha(m+1)\left[1 - \frac{R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)}\right]$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.9.6 [59]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $\frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap Q$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie* $\frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\left[\frac{R^{m+2} f(z)}{R^{m+1} f(z)} - 1\right] + \alpha(m+1)\left[1 - \frac{R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)}\right]$ *univalentă în U. Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că funcţia* q_1 *satisface relaţiile* (III.9.2) şi (III.9.5), iar *funcţia* q_2 *satisface relaţiile* (III.9.1) şi (III.9.2). *Dacă*

$$q_1(z) + \frac{z q_1'(z)}{q_1(z)} \prec \frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\left[\frac{R^{m+2} f(z)}{R^{m+1} f(z)} - 1\right] +$$
$$+ \alpha(m+1)\left[1 - \frac{R^{m+1} f(z)}{R^m f(z)}\right] \prec q_2(z) + \frac{z q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \frac{R^{m+1} f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.9.7 [59]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$ *,* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie q o funcţie univalentă în U şi presupunem că satisface condiţiile* (III.9.1) şi (III.9.2). *Dacă*

$$(m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - m\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} - 1 \prec q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)},$$

atunci

$$\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} \prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.9.8 [59]: *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie* $(m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - m\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} - 1$ *univalentă în U . Fie funcţia q convexă în U şi presupunem că satisface relaţiile* (III.9.2) şi (III.9.5). *Dacă*

$$q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)} \prec (m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - m\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} - 1,$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.9.9 [59]: *Fie* $f \in \mathcal{A}_n$, $\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie* $(m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - m\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} - 1$ *univalentă în U . Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că funcţia* q_1 *satisface relaţiile* (III.9.2) şi (III.9.5), iar *funcţia* q_2 *satisface relaţiile* (III.9.1) şi (III.9.2). *Dacă*

$$q_1(z) + \frac{z\,q_1'(z)}{q_1(z)} \prec (m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - m\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} - 1 \prec q_2(z) + \frac{z\,q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} \prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.9.10 [67]: *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k,n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie funcţia q univalentă în U şi presunem că satisface condiţiile:*

$$\operatorname{Re} q(z) > 0 \tag{III.9.13}$$

şi

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z\,q''(z)}{g'(z)} - \frac{z\,q'(z)}{q(z)} + 1\right] > 0. \tag{III.9.14}$$

Dacă

$$\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha\frac{(m+1)R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}-\alpha\left(m+k\right)\prec q(z)+\frac{z\,q'(z)}{q(z)},$$

atunci

$$\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.9.11 [67]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}(k,n)$, $k,n\in\mathbb{N}$, $\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\in\mathcal{H}[q(0),1]\cap Q$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *şi* $\alpha>0$ *. Fie*

$$\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha\frac{(m+1)R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}-\alpha\left(m+k\right)$$

univalentă în U . Fie funcția q convexă în U. Presupunem că funcția q satisface relațiile (III.9.14) şi

$$\operatorname{Re}\left[q(z)q'(z)\right]>0. \qquad \text{(III.9.17)}$$

Dacă

$$q(z)+\frac{z\,q'(z)}{q(z)}\prec\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha\frac{(m+1)R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}-\alpha\left(m+k\right),$$

atunci

$$q(z)\prec\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.9.12 [67]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}(k,n)$, $k,n\in\mathbb{N}$, $\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\in\mathcal{H}[q(0),1]\cap Q$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *şi* $\alpha>0$ *. Fie*

$$\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha\frac{(m+1)R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}-\alpha\left(m+k\right)$$

univalentă în U . Fie funcțiile q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că* q_1 *satisface relațiile* (III.9.14) *şi* (III.9.17), iar q_2 *satisface relațiile* (III.9.13) *şi* (III.9.14). *Dacă*

$$q_1(z)+\frac{z\,q_1'(z)}{q_1(z)}\prec\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha\frac{(m+1)R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}-\alpha\left(m+k\right)\prec q_2(z)+\frac{z\,q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z)\prec\left(\frac{R^m f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.9.13 [67]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k,n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie funcţia q univalentă în U şi presunem că satisface condiţiile* (III.9.13) *şi* (III.9.14). *Dacă*

$$\frac{R^{m+1}f(z)}{z^k}\left(\frac{z^k}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - (m+k+1) + \alpha(m+k)$$
$$-\alpha(m+1)\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} \prec q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)},$$

atunci

$$\frac{R^{m+1}f(z)}{z^k}\left(\frac{z^k}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.9.14 [67]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k,n \in \mathbb{N}$, $\frac{R^{m+1}f(z)}{z^k}\left(\frac{z^k}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie*

$$\frac{R^{m+1}f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - (m+k+1) + \alpha(m+k) - \alpha(m+1)\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}$$

univalentă în U . *Fie funcţia q convexă în U. Presupunem că funcţia q satisface relaţiile* (III.9.14) şi (III.9.17). *Dacă*

$$q(z) + \frac{z\,q'(z)}{q(z)} \prec \frac{R^{m+1}f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - (m+k+1)$$
$$+\alpha(m+k) - \alpha(m+1)\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)},$$

atunci

$$q(z) \prec \frac{R^{m+1}f(z)}{z^k}\left(\frac{z^k}{R^m f(z)}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.9.15 [67]**:** *Fie* $f \in \mathcal{A}(k,n)$, $k,n \in \mathbb{N}$, $\frac{R^{m+1}f(z)}{z^k}\left(\frac{z^k}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \in \mathcal{H}[q(0),1] \cap \mathcal{Q}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *şi* $\alpha > 0$. *Fie*

$$\frac{R^{m+1}f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} + (m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)} - (m+k+1) + \alpha(m+k) - \alpha(m+1)\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)}$$

univalentă în U . *Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că* q_1 *satisface relaţiile* (III.9.14) *şi* (III.9.17), iar q_2 *satisface relaţiile* (III.9.13) *şi* (III.9.14). *Dacă*

$$q_1(z)+\frac{z\,q_1'(z)}{q_1(z)} \prec \frac{R^{m+1}f(z)}{z}\left(\frac{z}{R^m f(z)}\right)^{\alpha}+(m+2)\frac{R^{m+2}f(z)}{R^{m+1}f(z)}-(m+k+1)$$
$$+\alpha(m+k)-\alpha(m+1)\frac{R^{m+1}f(z)}{R^m f(z)} \prec q_2(z)+\frac{z\,q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \frac{R^{m+1}f(z)}{z^k}\left(\frac{z^k}{R^m f(z)}\right)^{\alpha} \prec q_2(z)$$

şi q_1 este cea mai bună subordonantă, iar q_2 este cea mai bună dominantă.

III.10. Subordonări şi superordonări diferențiale obținute cu ajutorul clasei transformarilor multiple

Rezultatele acestui paragraf sunt originale şi sunt conținute în [60], [68].

Definiția III.10.1: *Fie funcția $f \in \mathcal{A}\ (k,n)$, $k,n\in\mathbb{N}$. Fie operatorul $I_k(r,\lambda):\mathcal{A}(k,n)\to\mathcal{A}(k,n)$, definit prin*

$$I_k(r,\lambda)f(z)=z^k+\sum_{j=k+1}^{\infty}\left(\frac{j+\lambda}{k+\lambda}\right)^r a_j z^j\ ,\ \lambda\ge 0\,,$$

$$(k+\lambda)I_k(r+1,\lambda)f(z)=z\left[I_k(r,\lambda)f(z)\right]'+\lambda\, I_k(r,\lambda)f(z)\,.$$

Teorema III.10.4 [60]**:** *Fie $f\in\mathcal{A}(k,n)$, $k,n\in\mathbb{N}$ şi $\lambda\ge 0$. Fie q o funcție univalentă în U şi presupunem că satisface relațiile:*

$$\operatorname{Re} q(z)>0 \tag{III.10.4}$$

şi

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z\,q''(z)}{g'(z)}-\frac{z\,q'(z)}{q(z)}+1\right]>0\,. \tag{III.10.5}$$

Dacă

$$(k+\lambda)\frac{I_k(r+2,\lambda)f(z)}{I_k(r+1,\lambda)f(z)}-(k+\lambda-1)\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)} \prec q(z)+\frac{z\,q'(z)}{q(z)} \tag{III.10.6}$$

atunci

$$\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)} \prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.10.5 [60]**:** *Fie funcția $f\in\mathcal{A}(k,n)$, $k,n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}\in\mathcal{H}\,[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ şi $\lambda\ge 0$. Fie*

$$(k+\lambda)\frac{I_k(r+2,\lambda)f(z)}{I_k(r+1,\lambda)f(z)}-(k+\lambda-1)\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}$$

univalentă în U . Fie funcția q convexă în U. Presupunem că funcția q satisface relațiile (III.10.5) *şi*

$$\mathrm{Re}\left[q(z)g'(z)\right]>0 \tag{III.10.8}$$

Dacă

$$q(z)+\frac{z\,q'(z)}{q(z)} \prec (k+\lambda)\frac{I_k(r+2,\lambda)f(z)}{I_k(r+1,\lambda)f(z)}-(k+\lambda-1)\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)} \tag{III.10.9}$$

atunci

$$q(z)\prec \frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.10.6 [60]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}(k,n)$*,* $k,n\in\mathbb{N}$*,* $\dfrac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}\in\mathcal{H}\,[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ *şi* $\lambda\geq 0$*. Fie* $(k+\lambda)\dfrac{I_k(r+2,\lambda)f(z)}{I_k(r+1,\lambda)f(z)}-(k+\lambda-1)\dfrac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}$ *univalentă în U. Fie funcţiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că* q_1 *satisface relaţiile* (III.10.5) *şi* (III.10.8), iar q_2 *satisface relaţiile* (III.10.4) *şi* (III.10.5). *Dacă*

$$q_1(z)+\frac{z\,q_1'(z)}{q_1(z)} \prec (k+\lambda)\frac{I_k(r+2,\lambda)f(z)}{I_k(r+1,\lambda)f(z)}-(k+\lambda-1)\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)} \prec q_2(z)+\frac{z\,q_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z)\prec \frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}\prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.10.7 [60]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}\ (k,n)$*,* $k,n\in\mathbb{N}$ *şi* $\lambda\geq 0$*. Fie q o funcţie univalentă în U şi presupunem că satisface relaţiile* (III.10.4) *şi* (III.10.5). *Dacă*

$$\left(\frac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha(k+\lambda)\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}-\alpha(k+\lambda)\prec q(z)+\frac{z\,q'(z)}{q(z)}\ ,$$

atunci

$$\left(\frac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\prec q(z),$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.10.8 [60]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}(k,n)$*,* $k,n\in\mathbb{N}$*,* $\left(\dfrac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\in\mathcal{H}\,[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ *şi* $\lambda\geq 0$*.*

Fie $\left(\dfrac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha(k+\lambda)\dfrac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}-\alpha(k+\lambda)$ *univalentă în U . Fie funcţia q convexă în U. Presupunem că funcţia q satisface relaţiile* (III.10.5) şi (III.10.8)*. Dacă*

$$q(z)+\frac{z\,q'(z)}{q(z)}\prec\left(\frac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha(k+\lambda)\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}-\alpha(k+\lambda),$$

atunci

$$q(z)\prec\left(\frac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.10.9 [60]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}(k,n)$, $k,n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}\in\mathcal{H}[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ *şi* $\lambda\ge 0$.

Fie $\left(\dfrac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha(k+\lambda)\dfrac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}-\alpha(k+\lambda)$ *univalentă în* U . *Fie funcțiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că* q_1 *satisface relațiile* (III.10.5) *şi* (III.10.8), iar q_2 *satisface relațiile* (III.10.4) *şi* (III.10.5). *Dacă*

$$q_1(z)+\frac{zq_1'(z)}{q_1(z)}\prec\left(\frac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}+\alpha(k+\lambda)\frac{I_k(r+1,\lambda)f(z)}{I_k(r,\lambda)f(z)}-\alpha(k+\lambda)\prec q_2(z)+\frac{zq_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z)\prec\left(\frac{I_k(r,\lambda)f(z)}{z^k}\right)^{\alpha}\prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.10.10 [68]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}_n$, $n\in\mathbb{N}$ *şi* $\lambda\ge 0$. *Fie q o funcție univalentă în U şi presupunem că satisface relațiile* (III.10.4) *şi* (III.10.5). *Dacă*

$$(\lambda+1)\frac{I(r+2,\lambda)f(z)}{I(r+1,\lambda)f(z)}-\lambda\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}\prec q(z)+\frac{zq'(z)}{q(z)}$$

atunci

$$\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}\prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.10.11 [68]**:** *Fie funcția* $f\in\mathcal{A}_n$, $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}\in\mathcal{H}[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ *şi* $\lambda\ge 0$.

Fie

$$(\lambda+1)\frac{I(r+2,\lambda)f(z)}{I(r+1,\lambda)f(z)}-\lambda\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}$$

univalentă în U . *Fie funcția q convexă în U. Presupunem că funcția q satisface relațiile* (III.10.5) *şi* (III.10.8). *Dacă*

$$q(z)+\frac{zq'(z)}{q(z)}\prec(\lambda+1)\frac{I(r+2,\lambda)f(z)}{I(r+1,\lambda)f(z)}-\lambda\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}$$

atunci

$$q(z)\prec\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.10.12 [68]**:** *Fie* $f\in\mathcal{A}_n$, $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}\in\mathcal{H}[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ *şi* $\lambda\ge 0$. *Fie*

$$(\lambda+1)\frac{I(r+2,\lambda)f(z)}{I(r+1,\lambda)f(z)}-\lambda\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}$$

univalentă în U *. Fie funcțiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că* q_1 *satisface relațiile* (III.10.5) *şi* (III.10.8), iar q_2 *satisface relațiile* (III.10.4) *şi* (III.10.5). *Dacă*

$$q_1(z)+\frac{zq_1'(z)}{q_1(z)}\prec(\lambda+1)\frac{I(r+2,\lambda)f(z)}{I(r+1,\lambda)f(z)}-\lambda\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}\prec q_2(z)+\frac{zq_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z)\prec\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}\prec q_2(z)$$

şi q_1 *este cea mai bună subordonantă, iar* q_2 *este cea mai bună dominantă.*

Teorema III.10.13 [68]: *Fie* $f\in\mathcal{A}_n$ *,* $n\in\mathbb{N}$ *şi* $\lambda\geq 0$*. Fie* q *o funcție univalentă în U şi presupunem că satisface relațiile* (III.10.4) *şi* (III.10.5). *Dacă*

$$\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}+\alpha(\lambda+1)\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}-\alpha(\lambda+1)\prec q(z)+\frac{zq'(z)}{q(z)}\ ,$$

atunci

$$\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}\prec q(z)$$

şi q este cea mai bună dominantă.

Teorema III.10.14 [68]: *Fie* $f\in\mathcal{A}_n$*,* $n\in\mathbb{N}$*,* $\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}\in\mathcal{H}[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ *şi* $\lambda\geq 0$*. Fie*

$$\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}+\alpha(\lambda+1)\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}-\alpha(\lambda+1)$$

univalentă în U *. Fie funcția q convexă în U. Presupunem că funcția q satisface relațiile* (III.10.5) şi (III.10.8). *Dacă*

$$q(z)+\frac{zq'(z)}{q(z)}\prec\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}+\alpha(\lambda+1)\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}-\alpha(\lambda+1),$$

atunci

$$q(z)\prec\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}$$

şi q este cea mai bună subordonantă.

Teorema III.10.15 [68]: *Fie* $f\in\mathcal{A}_n$*,* $n\in\mathbb{N}$*,* $\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}\in\mathcal{H}[q(0),1]\cap\mathcal{Q}$ *şi* $\lambda\geq 0$*. Fie*

$$\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}+\alpha(\lambda+1)\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}-\alpha(\lambda+1)$$

univalentă în U *. Fie funcțiile* q_1 *convexă şi* q_2 *univalentă în U. Presupunem că* q_1 *satisface relațiile* (III.10.5) *şi* (III.10.8), iar q_2 *satisface relațiile* (III.10.4) *şi* (III.10.5). *Dacă*

$$q_1(z)+\frac{zq_1'(z)}{q_1(z)}\prec\left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha}+\alpha(\lambda+1)\frac{I(r+1,\lambda)f(z)}{I(r,\lambda)f(z)}-\alpha(\lambda+1)\prec q_2(z)+\frac{zq_2'(z)}{q_2(z)},$$

atunci

$$q_1(z) \prec \left(\frac{I(r,\lambda)f(z)}{z}\right)^{\alpha} \prec q_2(z)$$

şi q_1 este cea mai bună subordonantă, iar q_2 este cea mai bună dominantă.

IV. SUBCLASE DE FUNCȚII UNIVALENTE

În capitol sunt prezentate subclase de funcții univalente definite cu ajutorul convoluției, subclase normate de funcții stelate şi convexe, subclase normate de funcții univalente definite cu ajutorul convoluției, subclase normate de funcții stelate şi convexe de ordin α şi subclase de funcții univalente cu coeficienti negativi. Rezultatele prezentate în acest capitol sunt originale şi sunt conținute în [62], [69], [70], [71], [72].

IV.1. Subclase de funcții univalente definite cu ajutorul convoluției

Folosind definiția convoluției s-au obținut noi subclase de funcții univalente. Rezultatele acestui paragraf sunt originale şi sunt conținute în [62].

Definiția IV.1.2: *Fie funcțiile f, g* $\in \mathcal{A}$, *definite astfel* $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $z \in U$ *şi* $g(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j$, $z \in U$, *cu* $(g * f)(0) = 0$ *şi notăm*:

$$S_g^{\,*} = \left\{ f \in S: \ \operatorname{Re}\frac{z(g*f)'(z)}{(g*f)(z)} > 0, z \in U, \ \ (g*f)'(0) \neq 0 \right\},$$

$$K_g = \left\{ f \in S: \ \operatorname{Re}\frac{z(g*f)''(z)}{(g*f)'(z)} + 1 > 0, z \in U, \ \ (g*f)'(0) \neq 0 \right\}.$$

Teorema IV.1.1 [62]: *Dacă* $f \in S^*$ *şi funcția g este convexă, atunci* $f \in S_g^{\,*}$.

Teorema IV.1.2 [62]: *Dacă* $f \in S_g^{\,*}$ *şi funcția h este convexă, atunci* $h * f \in S_g^{\,*}$.

Teorema IV.1.3 [62]: *Fie funcția h convexă, cu proprietatea* $h(0) = h'(0) - 1 = 0$. *Atunci* $S_g^{\,*} \subseteq S_{h*g}^{\,*}$.

Definiția IV.1.3: *Fie* $0 \le \alpha < 1$. *Notăm*:

$$S_g^{\,*}(\alpha) = \left\{ f \in S: \ \operatorname{Re}\frac{z\,(g*f)'(z)}{(g*f)(z)} > \alpha, z \in U, \ \ (g*f)'(0) \neq 0 \right\},$$

$$K_g(\alpha) = \left\{ f \in S: \ \operatorname{Re}\frac{z(g*f)''(z)}{(g*f)'(z)} + 1 > \alpha, z \in U \right\}.$$

Teorema IV.1.4 [62]: *Fie funcția g convexă . Atunci* $K_g \subseteq S_g^{\,*}$

Teorema IV.1.5 [62]: *Fie funcția g convexă . Funcția* $f \in K_g$ *dacă şi numai dacă* $h \in S_g^*$*, unde* $h(z) = z\,f'(z)$, $z \in U$ *sau* $f \in K_g \Leftrightarrow z\,f'(z) \in S_g^*$.

Definiția IV.1.6: *Fie funcțiile* $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $g(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j$, $z \in U$, *cu* $(g * f)(0) = 0$ *şi* $\varphi \in S_g^*$. *Notăm:* $C_g = \left\{ f \in S: \ \operatorname{Re} \frac{z\left(g * f\right)'(z)}{\left(g * \varphi\right)(z)} > 0, z \in U \right\}$.

Teorema IV.1.6 [62]: *Fie funcția g convexă . Atunci* $S_g^* \subseteq C_g$

Teorema IV.1.7 [62]: *Fie funcția g convexă . Dacă* $f \in C_g$ *şi funcția h este convexă, atunci* $h * f \in C_g$.

Teorema IV.1.8 [62]: *Fie funcția g convexă . Fie* $f \in C_g$ *şi fie funcția h convexă, cu proprietatea* $h(0) = h'(0) - 1 = 0$. *Atunci* $C_g \subseteq C_{h*g}$.

Definiția IV.1.7: *Fie* $0 \le \alpha < 1$. *Notăm:* $C_g(\alpha) = \left\{ f \in S: \ \operatorname{Re} \frac{z\left(g * f\right)'(z)}{\left(g * \varphi\right)(z)} > \alpha, z \in U \right\}$.

IV.2. Subclase normate de funcții stelate şi convexe

În [42] S. Kanas şi F. Ronning introduc clasele $S^*(\zeta)$ şi $K(\zeta)$ a funcțiilor stelate şi respectiv convexe folosind normarea $f(\zeta) = f'(\zeta) - 1 = 0$, unde $\zeta \in U$ este un punct fixat. În acest paragraf prezentăm relații între aceste clase de funcții care sunt conținute în [69].

Definiția IV.2.1: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Notăm cu* $\mathcal{P}(\zeta)$ *clasa funcțiilor*

$$p(z) = 1 + p_n(z - \zeta)^n + p_{n+1}(z - \zeta)^{n+1} + \ldots$$

olomorfă în U şi satisface condițiile $p(\zeta) = 1$ *şi* $\operatorname{Re} p(z) > 0$. $\mathcal{P}(\zeta)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor de tip Caratheodory normate în*** ζ.

Definiția IV.2.2: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$*, fie funcția*

$$f(z) = (z - \zeta) + a_{n+1}(z - \zeta)^{n+1} + a_{n+2}(z - \zeta)^{n+2} + \ldots$$

şi notăm: $\mathcal{A}_n(\zeta) = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \ : \ f(\zeta) = f'(\zeta) - 1 = 0 \right\}$,

iar pentru $n = 1$, $\mathcal{A}_1(\zeta) = \mathcal{A}(\zeta) = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \ : \ f(\zeta) = f'(\zeta) - 1 = 0 \right\}$.

Definiția IV.2.3: *Notăm cu:* $S(\zeta) = \{ f \in \mathcal{A}(\zeta) :$ *f este univalentă în U*$\}$. $S(\zeta)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor univalente normate în*** ζ.

Definiția IV.2.4: *Notăm cu:*

$$S^*(\zeta) = \left\{ f \in S(\zeta): \ \operatorname{Re} \frac{(z - \zeta)\,f'(z)}{f(z)} > 0, z \in U, \quad f'(\zeta) \ne 0 \right\}.$$

$S^*(\zeta)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor stelate normate în*** ζ.

$$K(\zeta) = \left\{ f \in S(\zeta): \ \operatorname{Re} \frac{(z - \zeta)\,f''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, z \in U, \quad f'(\zeta) \ne 0 \right\}.$$

$K(\zeta)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor convexe normate în*** ζ .

Lema IV.2.1 [42]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *şi fie funcția* $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ *, care satisface condiția*

$$\operatorname{Re}\psi(\rho i, \sigma, \mu + i\nu; z) \le 0,$$

atunci când $\rho, \sigma, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ *,* $\sigma \le -\frac{n}{2}(1+\rho^2)$ *,* $\sigma + \mu \le 0$ *, unde* $z \in U$ *,* $n \ge 1$*. Dacă* $p \in \mathcal{H}[1,n]$ *şi*

$$\operatorname{Re}\psi\left(p(z), (z-\zeta)\, p'(z), (z-\zeta)^2\, p''(z); z\right) > 0,\ z \in U, \text{ atunci } \operatorname{Re} p(z) > 0,\ z \in U.$$

Teorema IV.2.2 [69]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *. Funcția* $f \in K(\zeta)$ *dacă şi numai dacă* $g \in S^*(\zeta)$ *, unde* $g(z) = (z-\zeta)\, f'(z)$ *,* $z \in U$ *sau* $f \in K(\zeta) \iff (z-\zeta)\, f'(z) \in S^*(\zeta)$ *.*

Teorema IV.2.3 [69]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *. Dacă* $p \in \mathcal{P}(\zeta)$ *,*

$$p(z) = 1 + p_n (z-\zeta)^n + p_{n+1}(z-\zeta)^{n+1} + \ldots,$$

atunci avem:

$$\operatorname{Re}\left[p(z) + \frac{(z-\zeta)\, p'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \right] > 0,\ z \in U \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} p(z) > 0,\ z \in U.$$

Definiția IV.2.7: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *, fie funcția*

$$f(z) = (z-\zeta) + a_2 (z-\zeta)^2 + a_3 (z-\zeta)^3 + \ldots .$$

Definim operatorul integral $L : \mathcal{H}[0,n] \to \mathcal{H}[0,n]$ *definit prin relația L(f) = F, unde*

$$F(z) = \frac{2}{z-\zeta} \int_{\zeta}^{z} f(t)\, dt \qquad \text{(IV.2.5)}$$

Teorema IV.2.4 [69]: *Dacă* $L : \mathcal{A}(\zeta) \to \mathcal{A}(\zeta)$ *este operatorul integral definit de relația* (IV.2.5)*, atunci:*

a) $L[S^*(\zeta)] \subset S^*(\zeta)$, b) $L[K(\zeta)] \subset K(\zeta)$.

Definiția IV.2.8 [69]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *, fie funcția*

$$f(z) = (z-\zeta) + a_2 (z-\zeta)^2 + a_3 (z-\zeta)^3 + \ldots .$$

Definim operatorul integral $L_\gamma : \mathcal{H}[0,n] \to \mathcal{H}[0,n]$ *prin relația* $L_\gamma(f) = F$*, unde*

$$F(z) = \frac{\gamma+1}{(z-\zeta)^\gamma} \int_{\zeta}^{z} f(t)(t-\zeta)^{\gamma-1}\, dt, \qquad \text{(IV.2.7)}$$

unde $\gamma \in \mathbb{N}^*$.

Teorema IV.2.5 [69]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *. Dacă* $L_\gamma : \mathcal{A}(\zeta) \to \mathcal{A}(\zeta)$ *este operatorul integral definit de relația* (IV.2.7) *şi* $\operatorname{Re}\gamma \ge 0$*, atunci:*

a) $L_\gamma[S^*(\zeta)] \subset S^*(\zeta)$, b) $L_\gamma[K(\zeta)] \subset K(\zeta)$.

Definiția IV.2.9: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *şi fie funcția*

$$f(z) = (z-\zeta) + a_2 (z-\zeta)^2 + a_3 (z-\zeta)^3 + \ldots$$

Definim ***operatorul diferențial*** $D_\zeta^n : \mathcal{A}(\zeta) \to \mathcal{A}(\zeta)$ *,* $n \in \mathbb{N}$*, prin:*

$$D_\zeta^0 f(z) = f(z),$$
$$D_\zeta^1 f(z) = D_\zeta f(z) = (z-\zeta) f'(z),$$
....
$$D_\zeta^n f(z) = D\left(D_\zeta^{n-1} f(z)\right).$$

Observația IV.2.1: *Dacă funcția* $f \in \mathcal{A}(\zeta)$, $f(z) = (z-\zeta) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j (z-\zeta)^j$, $z \in U$, *atunci*

$$D_\zeta^n f(z) = (z-\zeta) + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j (z-\zeta)^j, \; z \in U.$$

Definiție IV.2.10: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Spunem că funcția* $f \in \mathcal{A}(\zeta)$ *este* ***n-stelată normată în*** ζ, $n \in \mathbb{N}$, *dacă verifică inegalitatea:* $\operatorname{Re}\frac{D_\zeta^{n+1} f(z)}{D_\zeta^n f(z)} > 0$, $z \in U$. *Vom nota cu* $S_n^*(\zeta)$ *clasa acestor funcții.*

IV.3. Subclase normate de funcții univalente definite cu ajutorul convoluției

Rezultatele acestui paragraf sunt originale, s-au obținut folosind normarea $f(\zeta) = f'(\zeta) - 1 = 0$, unde $\zeta \in U$ este un punct fixat şi definiția convoluției. Aceste rezultate sunt conținute în [70].

Definiția IV.3.1 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *şi fie funcțiile* $f, g \in \mathcal{A}(\zeta)$, *definite astfel:* $f(z) = (z-\zeta) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j (z-\zeta)^j$, $z \in U$ *şi* $g(z) = (z-\zeta) + \sum_{j=2}^{\infty} b_j (z-\zeta)^j$, $z \in U$. *Vom nota prin* $f * g$ *convoluția sau produsul Hadamard al celor două funcții, dat prin relația:*

$$(f * g)(z) = (z-\zeta) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j b_j (z-\zeta)^j, \; z \in U.$$

Definiția IV.3.2 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$, *fie funcțiile* $f(z) = (z-\zeta) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j (z-\zeta)^j$ *şi* $g(z) = (z-\zeta) + \sum_{j=2}^{\infty} b_j (z-\zeta)^j$, $z \in U$, *cu* $\left(g * f\right)(\zeta) = 0$ *şi notăm:*

$$S_g^*(\zeta) = \left\{ f \in S(\zeta): \;\; \operatorname{Re}\frac{(z-\zeta)\left(g * f\right)'(z)}{\left(g * f\right)(z)} > 0, z \in U, \left(g * f\right)'(\zeta) \neq 0 \right\}.$$

$$K_g(\zeta) = \left\{ f \in S(\zeta): \;\; \operatorname{Re}\frac{(z-\zeta)\left(g * f\right)''(z)}{\left(g * f\right)'(z)} + 1 > 0, z \in U, \left(g * f\right)'(\zeta) \neq 0 \right\}.$$

Teorema IV.3.1 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Atunci* $K_g(\zeta) \subseteq S_g^*(\zeta)$.

Teorema IV.3.2 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Dacă* $f \in S^*(\zeta)$ *şi funcția g este convexă, atunci* $f \in S_g^*(\zeta)$.

Teorema IV.3.3 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Funcția* $f \in K_g(\zeta)$ *dacă şi numai dacă* $h \in S_g^*(\zeta)$, *unde* $h(z)=(z-\zeta)f'(z)$, $z \in U$ *sau* $f \in K_g(\zeta) \Leftrightarrow (z-\zeta)f'(z) \in S_g^*(\zeta)$.

Teorema IV.3.4 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Dacă* $f \in S_g^*(\zeta)$ *şi funcția h este convexă, atunci* $h * f \in S_g^*(\zeta)$.

Teorema IV.3.5 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Fie* $f \in S_g^*(\zeta)$ *şi fie funcția h convexă, cu proprietatea* $h(\zeta)=h'(\zeta)-1=0$. *Atunci* $S_g^*(\zeta) \subseteq S_{h*g}^*(\zeta)$.

Teorema IV.3.6 [70]: *Dacă* $f \in K_g(\zeta)$ *şi funcția h este convexă, atunci* $h * f \in K_g(\zeta)$.

Teorema IV.3.7 [70]: *Fie* $f \in K_g(\zeta)$ *şi fie funcția h convexă, cu proprietatea* $h(\zeta)=h'(\zeta)-1=0$. *Atunci* $K_g(\zeta) \subseteq K_{h*g}(\zeta)$.

Definiția IV.3.4 [70]: *Notăm:*

$$C_g(\zeta) = \left\{ f \in S(\zeta): \quad \mathrm{Re}\frac{(z-\zeta)\left(g*f\right)'(z)}{\left(g*\varphi\right)(z)} > 0, z \in U, \left(g*f\right)'(\zeta) \neq 0 \right\}.$$

Teorema IV.3.8 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Atunci* $S_g^*(\zeta) \subseteq C_g(\zeta)$.

Teorema IV.3.9 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Dacă* $f \in C_g(\zeta)$ *şi funcția h este convexă, atunci* $h * f \in C_g(\zeta)$.

Teorema IV.3.10 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Fie* $f \in C_g(\zeta)$ *şi fie funcția h convexă, cu proprietatea* $h(\zeta)=h'(\zeta)=1$. *Atunci* $C_g(\zeta) \subseteq C_{h*g}(\zeta)$.

Definiția IV.3.5 [70]: *Notăm cu:*

$$M_{\alpha,g}(\zeta) = \left\{ f \in S(\zeta): \mathrm{Re}(1-\alpha)\frac{(z-\zeta)(g*f)'(z)}{(g*f)(z)} + \alpha\left(1+\frac{(z-\zeta)(g*f)''(z)}{(g*f)'(z)}\right) > 0, z \in U \right\}$$

Teorema IV.3.11 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$ *avem* $M_{\alpha,g}(\zeta) \subseteq S_g^*(\zeta)$.

Teorema IV.3.12 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Oricare ar fi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *cu* $0 \le \dfrac{\beta}{\alpha} < 1$, *avem* $M_{\alpha,g}(\zeta) \subset M_{\beta,g}(\zeta)$.

Definiția IV.3.6 [70]: *Notăm cu:*

$$\hat{S}_{\gamma,g}(\zeta) = \left\{ \; f \in S(\zeta) \; : \; \mathrm{Re}\left[e^{i\gamma}\frac{(z-\zeta)(g*f)'(z)}{(g*f)(z)}\right] > 0, z \in U \right\}, \textit{ unde } \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Definiția IV.3.7 [70]: *Notăm cu* $\widehat{S_g}(\zeta) = \bigcup\limits_{\gamma \in \left(-\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \hat{S}_{\gamma,g}(\zeta)$.

Definiția IV.3.8 [70]: *Notăm:*

$$S_g^*(\zeta,\alpha) = \left\{ f \in S(\zeta): \quad \mathrm{Re}\frac{(z-\zeta)\left(g*f\right)'(z)}{\left(g*f\right)(z)} > \alpha, z \in U, \left(g*f\right)'(\zeta) \neq 0 \right\}.$$

$$K_g(\zeta,\alpha) = \left\{ f \in S(\zeta): \quad \mathrm{Re}\frac{(z-\zeta)\left(g*f\right)''(z)}{\left(g*f\right)'(z)}+1>\alpha,\, z\in U, \left(g*f\right)'(\zeta)\neq 0 \right\}.$$

$$C_g(\zeta,\alpha) = \left\{ f \in S(\zeta): \quad \mathrm{Re}\frac{(z-\zeta)\left(g*f\right)'(z)}{\left(g*\varphi\right)(z)}>\alpha,\, z\in U \right\}.$$

$$M_{\alpha,g}(\zeta,\gamma)=\left\{ f\in S(\zeta): \mathrm{Re}(1-\alpha)\frac{(z-\zeta)(g*f)'(z)}{(g*f)(z)}+\alpha\left(1+\frac{(z-\zeta)(g*f)''(z)}{(g*f)'(z)}\right)>\gamma,\, z\in U\right\}.$$

$$\hat{S}_{\gamma,g}(\zeta,\alpha)=\left\{ \ f\in S(\zeta)\ :\ \mathrm{Re}\left[e^{i\gamma}\,\frac{(z-\zeta)(g*f)'(z)}{(g*f)(z)}\right]>\alpha, z\in U\right\},\ unde\ \gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Definiția IV.3.13 [70]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$. *Definim* ***operatorul*** $R_\zeta^n\ : \mathcal{A}\ (\zeta)\ \to \mathcal{A}\ \ (\zeta)$, $n\in\mathbb{N}$*, prin:*

$$R_\zeta^n f(z)=\frac{(z-\zeta)}{(1-(z-\zeta))^{n+1}}*f(z)=\frac{(z-\zeta)\left((z-\zeta)^{n-1}f(z)\right)^{(n)}}{n!},\ z\in U.$$

Observația IV.3.5: Dacă funcția $f\in\ \mathcal{A}\ (\zeta)$, $f(z)=(z-\zeta)+\sum_{j=2}^{\infty}a_j\,(z-\zeta)^j$, $z\in U$, atunci

$$R_\zeta^n f(z)=(z-\zeta)+\sum_{j=2}^{\infty}C_{n+j-1}^{n}\,a_j\,(z-\zeta)^j,\ z\in U.$$

Definiția IV.3.14 [70]: *Spunem că funcția* $f\in\ \mathcal{A}\ (\zeta)$ *este* ***n-convexă,*** $n\in\mathbb{N}$*, dacă verifică inegalitatea:* $\mathrm{Re}\dfrac{R_\zeta^{n+1}f(z)}{R_\zeta^n f(z)}>\dfrac{1}{2}$**,** $z\in U$**.** *Vom nota cu* $K_n(\zeta)$ *clasa acestor funcții.*

IV.4. Subclase normate de funcții stelate şi convexe de ordin α

Rezultatele acestui paragraf sunt originale, s-au obținut folosind normarea $f(\zeta)=f'(\zeta)-1=0$, unde $\zeta\in U$ este un punct fixat şi sunt conținute în [71].

Definiția IV.4.1: *Fie punctul fixat* $\zeta\in U$ *şi fie funcția*

$$f(z)=(z-\zeta)+a_2(z-\zeta)^2+a_3(z-\zeta)^3+...$$

Fie $0\le\alpha<1$. *Atunci notăm cu:*

$$S^*(\alpha;\zeta)=\left\{\ f\in\mathcal{A}_n\ (\zeta):\mathrm{Re}\frac{(z-\zeta)\,f'(z)}{f(z)}>\alpha, z\in U, \left(g*f\right)'(\zeta)\neq 0\right\},$$

$S^*(\alpha;\zeta)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor stelate de ordin*** α ***normate în*** ζ .

$$K(\alpha;\zeta)=\left\{\ f\in\mathcal{A}_n\ (\zeta):\ \mathrm{Re}\frac{(z-\zeta)\,f''(z)}{f'(z)}+1>\alpha, z\in U, \left(g*f\right)'(\zeta)\neq 0\right\}.$$

$K(\alpha;\zeta)$ *poartă numele de* ***clasa funcțiilor conexe de ordin*** α ***normate în*** ζ .

Teorema IV.4.1 [71]: *Fie* ζ *un punct fix din* U *şi fie* $0 \le \alpha < 1$. *Atunci au loc* $S^*(\alpha,\zeta) \subset S^*(\zeta)$ *şi* $K(\alpha,\zeta) \subset K(\zeta)$.

Teorema IV.4.2 [71]: *Fie* ζ *un punct fix din* U *şi fie* $0 \le \alpha < 1$. *Funcţia* $f \in S^*(\alpha,\zeta)$ *dacă şi numai dacă funcţia* $g \in S^*(\zeta)$, *unde*

$$g(z) = (z-\zeta)\left[\frac{f(z)}{z-\zeta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

unde $\left[\frac{f(z)}{z-\zeta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ *este determinarea olomorfă pentru care* $\left.\left[\frac{f(z)}{z-\zeta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right|_{z=\zeta} = 1$.

Corolarul IV.4.1 [71]: Fie punctul fixat $\zeta \in U$. Dacă $0 \le \alpha < 1$, atunci funcţia $f \in K(\alpha;\zeta)$ dacă şi numai dacă funcţia $g \in S^*(\alpha;\zeta)$, unde $g(z) = (z-\zeta)\left[f'(z)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

IV.5. Subclase normate de funcţii alfa-convexe

Rezultatele acestui paragraf sunt originale, s-au obţinut folosind normarea $f(\zeta) = f'(\zeta) - 1 = 0$, unde $\zeta \in U$ este un punct fixat şi sunt conţinute în [72].

Definiţia IV.5.1 [72]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$ *şi funcţia*

$$J(\alpha, f; z,\zeta) = (1-\alpha)\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right),\ z \in U.$$

Notăm cu $M_\alpha(\zeta) = \{\, f \in \mathcal{H}(U) :\ f(\zeta) = f'(\zeta) - 1 = 0,\ \frac{f(z)f'(z)}{z} \ne 0,\ \operatorname{Re} J(\alpha, f; z,\zeta) > 0,\ z \in U \,\}$. $M_\alpha(\zeta)$ *poartă numele de* ***clasa funcţiilor alfa-convexe normate în*** ζ.

Teorema IV.5.1 [72]: *Fie punctul fixat* $\zeta \in U$.

a) *Pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$ *avem* $M_\alpha(\zeta) \subseteq S^*(\zeta)$,

b) *Oricare ar fi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *cu* $0 \le \frac{\beta}{\alpha} < 1$ *avem* $M_\alpha(\zeta) \subset M_\beta(\zeta)$.

Teorema IV.5.2 [72]: *Fie punctul* ζ *fixat şi fie* $\alpha \ge 0$. *Atunci* $f \in M_\alpha(\zeta)$ *dacă şi numai dacă* $F \in S^*(\zeta)$, *unde* $F(z) = f(z)\left[\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\right]^\alpha$, *cu* $\left[\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\right]^\alpha$ *în punctul* $z = \zeta$ *să fie* 1.

Definiţia IV.5.2 [72]: *Fie* ζ *un punct fix din U,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $f \in \mathcal{A}_n(\zeta)$, *cu*

$$\frac{f(z)f'(z)}{z-\zeta} \ne 0,\ \alpha\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)} \ne 0,\ z \in U.$$

Spunem că funcţia f *aparţine clasei* $M_\alpha^n(\zeta)$ *dacă funcţia* $F : U \to \mathbb{C}$, *definită prin*

$$F(z) = f(z)\left[1 + \alpha\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\right]^\alpha$$

este o funcţie stelată în U.

Teorema IV.5.3 [72]: *Fie* ζ *un punct fix din U. Pentru orice* $\alpha < 0$, *avem* $M_\alpha^n(\zeta) \subset S^*(\zeta)$.

Definiția IV.5.3 [72]: *Fie* ζ *un punct fix din U,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $f \in \mathcal{A}_n(\zeta)$, *cu*

$$\frac{f(z)\, f'(z)}{z-\zeta} \neq 0,\ 1-\alpha+\alpha \frac{(z-\zeta)\, f'(z)}{f(z)} \neq 0,\ z \in U.$$

Spunem că funcția f *aparține clasei* $M_{\alpha,\beta}^n(\zeta)$ *dacă funcția* $F: U \to \mathbb{C}$, *definită prin*

$$F(z) = f(z)\left[\frac{(z-\zeta)\, f'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha(1-\beta)} \left[1-\alpha+\alpha \frac{(z-\zeta)\, f'(z)}{f(z)}\right]^{\beta}$$

este o funcție stelată în U.

Teorema IV.5.4 [72]: *Fie* ζ *un punct fix din U. Pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta(1-\alpha) \geq 0$, *avem* $M_{\alpha,\beta}^n(\zeta) \subset S^*(\zeta)$.

Definiția IV.5.4 [72]: *Fie* ζ *un punct fix din U,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $f \in \mathcal{A}_n(\zeta)$ *cu*

$$\frac{f(z)\, f'(z)}{z} \neq 0,\ 1-\alpha+\alpha \frac{(z-\zeta)\, f'(z)}{f(z)} \neq 0,\ z \in U.$$

Spunem că funcția f aparține clasei $M_{\alpha,\beta}^n(\zeta)$ *dacă funcția* $F: U \to \mathbb{C}$, *definită prin*

$$F(z) = f(z)\left[\frac{(z-\zeta)\, f'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha(1-\beta)} \left[\alpha \frac{(z-\zeta)\, f'(z)}{f(z)}\right]^{\beta}$$

este o funcție stelată în *U*.

Teorema IV.5.5 [72]: *Pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *avem* $M_{\alpha,\beta}^n(\zeta) \subset S^*$.

IV. 6. Subclase de funcții univalente cu coeficienti negativi

Rezultatele acestui paragraf sunt originale şi sunt conținute în [73].

H. M. Srivastava şi A. A. Attiya în lucrarea [137], au introdus operatorul $J_{n,\lambda}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definit astfel:

$$J_{n,\lambda} f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda+k}\right)^n a_k z^k,\ z \in U. \quad \text{(IV.6.3)}$$

$$(1+\lambda) J_{n+1,\lambda} f(z) = z\left(J_{n,\lambda} f(z)\right)' + \lambda J_{n,\lambda} f(z). \quad \text{(IV.6.4)}$$

Notăm cu $S_{n,\lambda}^*(\alpha)$ clasa de funcții $f \in \mathcal{S}$ ce îndeplinesc condiția

$$\operatorname{Re} \frac{z\left(J_{n,\lambda} f(z)\right)'}{J_{n,\lambda} f(z)} > \alpha,\ 0 \leq \alpha < 1,\ z \in U. \quad \text{(IV.6.5)}$$

Din relațiile (IV.6.4) şi (IV.6.5) rezultă că o funcție $f \in \mathcal{S}$ aparține clasei $S_{n,\lambda}^*(\alpha)$ dacă şi numai dacă

$$\operatorname{Re} \frac{J_{n+1,\lambda} f(z)}{J_{n,\lambda} f(z)} > \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1},\ 0 \leq \alpha < 1,\ z \in U. \quad \text{(IV.6.6)}$$

Definiția IV.6.1 [73]: *Spunem că o funcție* $f \in \mathcal{T}$ *este din clasa* $TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, $n \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$ *dacă funcția* f *satisface condiția* (IV.6.6).

Teorema IV.6.1 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcția* $f \in \mathcal{T}$. *Atunci funcția* $f(z)$ *este din clasa* $TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$ *dacă şi numai dacă*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^2 - (\lambda+k)(\lambda+\alpha)}{\lambda+k} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda+k}\right)^n a_k < 1-\alpha . \qquad \text{(IV.6.7)}$$

Rezultatul este exact.

Rezultatul (IV.6.7) este exact pentru funcția

$$f(z) = z - \frac{(1-\alpha)(\lambda+k)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+k)(\lambda+\alpha)} \left(\frac{\lambda+k}{\lambda+1}\right)^n z^k . \qquad \text{(IV.6.9)}$$

Corolarul IV.6.1 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcția* $f \in \mathcal{T}$. *Atunci funcția* $f(z)$ *este din clasa* $TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$ *dacă*

$$a_k \le \frac{(1-\alpha)(\lambda+k)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+k)(\lambda+\alpha)} \left(\frac{\lambda+k}{\lambda+1}\right)^n . \qquad \text{(IV.6.10)}$$

Avem egalitate în relația (IV.6.10) *dacă funcția* $f(z)$ *este dată de relația* (IV.6.9).

Teorema IV.6.2 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcția* $f \in \mathcal{T}$. *Atunci*

$$TS^*_{n,\lambda}(\alpha) \subseteq TS^*_{n+1,\lambda}(\alpha) . \qquad \text{(IV.6.11)}$$

Teorema IV.6.3 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 < 1$ *şi fie funcția* $f \in \mathcal{T}$ *Atunci*

$$TS^*_{n,\lambda}(\alpha_2) \subseteq TS^*_{n,\lambda}(\alpha_1) . \qquad \text{(IV.6.12)}$$

Teorema IV.6.4 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcția* $f \in \mathcal{T}$ *Dacă* $f \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$ *şi* $|z| = r < 1$, *atunci*

$$r - \frac{(1-\alpha)(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{(1-\alpha)(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n r^2 \qquad \text{(IV.6.16)}$$

şi

$$1 - \left[\frac{2(\lambda+\alpha)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)} - \alpha\right] \frac{\lambda+2}{\lambda+\alpha} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n r \le |f'(z)| \le 1 + \left[\frac{2(\lambda+\alpha)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)} - \alpha\right] \frac{\lambda+2}{\lambda+\alpha} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n r$$

(IV.6.17)

Limitele în relațiile (IV.6.16) şi (IV.6.17) sunt atinse dacă funcția $f(z)$ este definită astfel:

$$f(z) = z - \frac{(1-\alpha)(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n z^2, \ (z = \pm r) . \qquad \text{(IV.6.20)}$$

Corolarul IV.6.2 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcția* $f \in \mathcal{T}$ *Dacă* $f \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, *atunci discul unitate U este inclus în planul dat de domeniul discului*

$$|w| < 1 - \frac{(1-\alpha)(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)} \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n . \qquad \text{(IV.6.21)}$$

Rezultatul este exact dacă funcția extremală $f(z)$ *este dată de relația* (IV.6.20).

Considerăm funcțiile $f_i(z)$, $i=\overline{1,m}$, definite astfel:

$$f_i(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k,i}\,z^k\ ,\ a_{k,i}\geq 0\ ,\ z\in U\ . \tag{IV.6.22}$$

Teorema IV.6.5 [73]: *Fie* $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0\leq\alpha<1$ *şi fie funcțiile* $f_i(z)\in TS_{n,\lambda}^*(\alpha)$, *cu* $i=\overline{1,m}$. *Atunci funcția* $h(z)$ *definită de relația*

$$h(z)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\,f_i(z)\,,\ unde\ c_i\geq 0\,,\sum_{i=1}^{\infty}c_i\ =1\,, \tag{IV.6.23}$$

face parte din clasa $TS_{n,\lambda}^*(\alpha)$.

Teorema IV.6.6 [73]: *Fie* $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0\leq\alpha<1$ *şi fie funcțiile* $f_i(z)\in TS_{n,\lambda}^*(\alpha)$, *cu* $i=\overline{1,m}$. *Atunci funcția* $h(z)$ *definită de relația:*

$$h(z)=\gamma f_1(z)+(1-\gamma)f_2(z)\,,\ unde\ 0\leq\gamma<1\,. \tag{IV.6.26}$$

este din clasa $TS_{n,\lambda}^*(\alpha)$.

Teorema IV.6.7 [73]: *Fie funcțiile*

$$f_1(z)=z\ \text{şi}\ f_k(z)=z-\frac{(1-\alpha)(\lambda+k)}{(\lambda+1)^2-(\lambda+k)(\lambda+\alpha)}\left(\frac{\lambda+k}{\lambda+1}\right)^n z^k,$$

unde $k\geq 2$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0\leq\alpha<1$. *Atunci funcția* $f(z)$ *este din clasa* $TS_{n,\lambda}^*(\alpha)$ *dacă şi numai dacă poate fi exprimată în forma*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_k\,f_k(z)\,,\ unde\ \upsilon_k\geq 0\,,\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_k\ =1\,. \tag{IV.6.29}$$

Definiția IV.6.1 [73]: *Fie funcțiile* $f_i(z)$, $i=\overline{1,2}$, *definite în relația* (IV.6.22). *Convoluția modificată sau produsul Hadamard modificat al funcțiilor* $f_1(z)$ *şi* $f_2(z)$ *este dat de relația:*

$$\left(f_1\otimes f_2\right)(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k,1}a_{k,2}\,z^k\ . \tag{IV.6.30}$$

Teorema IV.6.8 [73]: *Fie* $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0\leq\alpha<1$ *şi fie funcțiile* $f_i(z)\in TS_{n,\lambda}^*(\alpha)$, $i=\overline{1,2}$. *Atunci produsul Hadamard modificat* $\left(f_1\otimes f_2\right)(z)\in TS_{n,\lambda}^*(\beta)$, *unde*

$$\beta=\frac{1-\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n\dfrac{(\lambda+2)(\lambda+1)^2(1-\alpha)^2-\lambda(\lambda+2)^2(1-\alpha)^2}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+2)(\lambda+\alpha)\right]^2}}{1-\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n\dfrac{(\lambda+2)^2(1-\alpha)^2}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+2)(\lambda+\alpha)\right]^2}}\,. \tag{IV.6.31}$$

Rezultatul este exact pentru funcțiile

$$f_i(z)=z-\frac{(1-\alpha)(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2-(\lambda+2)(\lambda+\alpha)}\left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n z^2\,,\ i=\overline{1,2}\,. \tag{IV.6.32}$$

Corolarul IV.6.4 [73]: *Fie* $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0\leq\alpha<1$ *şi fie funcțiile* $f_i(z)\in TS_{n,\lambda}^*(\alpha)$, *cu* $i=\overline{1,2}$. *Atunci funcția*

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{a_{k,1}\, a_{k,2}}\, z^k ,$$

este din clasa $TS_{n,\lambda}^{*}(\alpha)$.

Teorema IV.6.9 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C} / \mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$, $0 \le \gamma < 1$ *şi fie funcţiile* $f_1(z) \in TS_{n,\lambda}^{*}(\alpha)$ *şi* $f_2(z) \in TS_{n,\lambda}^{*}(\beta)$. *Atunci* $\left(f_1 \otimes f_2\right)(z) \in TS_{n,\lambda}^{*}(\gamma)$, *unde*

$$\gamma = \frac{1 - \dfrac{(\lambda+2)(1-\alpha)(1-\beta)\left[(\lambda+1)^2 - \lambda(\lambda+2)\right]}{\left[(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)\right]\left[(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\beta)\right]}\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n}{1 - \dfrac{(\lambda+2)^2(1-\alpha)(1-\beta)}{\left[(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)\right]\left[(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\beta)\right]}\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n}. \tag{IV.6.37}$$

Rezultatul este exact pentru funcţiile

$$f_1(z) = z - \frac{(1-\alpha)(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)}\left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n z^2 ,$$

şi

$$f_2(z) = z - \frac{(1-\beta)(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\beta)}\left(\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n z^2 .$$

Teorema IV.6.10 [73]**:** *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C} / \mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcţiile* $f_i(z) \in TS_{n,\lambda}^{*}(\alpha)$, $i = \overline{1,2}$. *Atunci funcţia* $h(z)$ *definită astfel:*

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \left(a_{k,1}^2 + a_{k,2}^2\right) z^k , \tag{IV.6.49}$$

este din clasa $TS_{n,\lambda}^{*}(\upsilon)$, *unde*

$$\upsilon = \frac{1 - 2\dfrac{(\lambda+2)(1-\alpha)^2\left[(\lambda+1)^2 - \lambda(\lambda+2)\right]}{\left[(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)\right]^2}\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n}{1 - \dfrac{(\lambda+2)^2(1-\alpha)^2}{\left[(\lambda+1)^2 - (\lambda+2)(\lambda+\alpha)\right]^2}\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\right)^n}. \tag{IV.6.50}$$

Rezultatul este exact pentru funcţiile $f_i(z) \in TS_{n,\lambda}^{*}(\alpha)$, $i = \overline{1,2}$ *definite de relaţia* (IV.6.32) *din teorema* IV.6.8.

Teorema IV.6.12 [73]: *Fie* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C} / \mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcţiile* $f_i(z) \in TS_{n_i,\lambda}^{*}(\alpha)$, $i = \overline{1,2}$. *Atunci* $\left(f_1 \otimes f_2\right)(z) \in TS_{n_1,\lambda}^{*}(\alpha) \cap TS_{n_2,\lambda}^{*}(\alpha)$.

Teorema IV.6.12 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C} / \mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *şi fie funcţia* $f \in \mathcal{T}$. *Dacă* $f \in TS_{n,\lambda}^{*}(\alpha)$, *atunci* $f(z)$ *este aproape-convexă de ordin* γ, *unde* $0 \le \gamma < 1$, *în* $|z| < r_1(n,\lambda,\alpha,\gamma)$, *unde*

$$r_1(n,\lambda,\alpha,\gamma) = \inf_k \left[\frac{1-\gamma}{k} \frac{(\lambda+1)^2 - (\lambda+k)(\lambda+\alpha)}{(1-\alpha)(\lambda+k)}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+k}\right)^n\right]^{\frac{1}{k-1}}, \text{ cu } k \ge 2 . \tag{IV.6.60}$$

Rezultatul este exact, pentru funcția extremală $f(z)$ *dată de relația* (IV.6.9).

Teorema IV.6.13 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *și fie funcția* $f \in \mathcal{T}$. *Dacă* $f \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, *atunci* $f(z)$ *este stelată de ordin* γ, *unde* $0 \le \gamma < 1$, *în* $|z| < r_2(n,\lambda,\alpha,\gamma)$, *unde*

$$r_2(n,\lambda,\alpha,\gamma) = \inf_k \left[\frac{1-\gamma}{k-\gamma} \frac{(\lambda+1)^2-(\lambda+k)(\lambda+\alpha)}{(1-\alpha)(\lambda+k)} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda+k} \right)^n \right]^{\frac{1}{k-1}}, \text{ cu } k \ge 2. \qquad \text{(IV.6.63)}$$

Rezultatul este exact, pentru funcția extremală $f(z)$ *dată de relația* (IV.6.9).

Teorema IV.6.14 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$ *și fie funcția* $f \in \mathcal{T}$. *Dacă* $f \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, *atunci* $f(z)$ *este convexă de ordin* γ, *unde* $0 \le \gamma < 1$, *în* $|z| < r_3(n,\lambda,\alpha,\gamma)$, *unde*

$$r_3(n,\lambda,\alpha,\gamma) = \inf_k \left[\frac{1-\gamma}{k(k-\gamma)} \frac{(\lambda+1)^2-(\lambda+k)(\lambda+\alpha)}{(1-\alpha)(\lambda+k)} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda+k} \right)^n \right]^{\frac{1}{k-1}}, \text{ cu } k \ge 2. \qquad \text{(IV.6.66)}$$

Rezultatul este exact, pentru funcția extremală $f(z)$ *dată de relația* (IV.6.9).

Teorema IV.6.15 [73]: F*ie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$, *fie funcția* $f \in \mathcal{T}$ *și fie funcția* $F(z)$ *definită astfel:*

$$F(z) = \frac{\gamma+1}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} f(t)\,dt. \qquad \text{(IV.6.69)}$$

Dacă $f \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, *atunci* $F \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, *pentru toți* γ, $-1 < \gamma$.

Corolarul IV.6.5 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$, *fie funcția* $f \in \mathcal{T}$ *și fie funcția* $F(z)$ *definită astfel*

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt. \qquad \text{(IV.6.70)}$$

Dacă $f \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, *atunci* $F \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$.

Teorema IV.6.16 [73]: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$, $0 \le \alpha < 1$, *fie funcția* $f \in \mathcal{T}$, *fie* γ *un număr real, astfel încât* $-1 < \gamma$ *și fie funcția* $F(z)$ *definită de relația* (IV.6.69). *Dacă* $f \in TS^*_{n,\lambda}(\alpha)$, *atunci* $F(z)$ *este univalentă în* $|z| < r$, *unde*

$$r = \inf_k \left[\frac{\gamma+k}{k(\gamma+1)} \frac{(\lambda+1)^2-(\lambda+k)(\lambda+\alpha)}{(1-\alpha)(\lambda+k)} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda+k} \right)^n \right]^{\frac{1}{k-1}}. \qquad \text{(IV.6.71)}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] S. Abdulbalin, *On a class of analytic functions involving the Sălăgean differential operator*, Tamkang Journal of Math. Vol. 23, No. 1, Spring 1992;
[2] M. K. Aouf, H. E. Darwish, *On new classes of analytic functions with negative coefficients,* Bull. Korean Math. Soc, 31(1994), no. 2, 269-288;
[3] M. K. Aouf, H. M. Hossen, *The starlike functions of order a and type 3 with finitely many fixed coefficients,* Mathematics 38(61), 1-2(1996), 3-9;
[4] M. K. Aouf, G. S. Sălăgean, *On certain class of p-valent functions with two fixed points,* Mathematics, 38(61), 1-2(196), 13-19;
[5] R. W. Barnard, C. Kellogg, *Applications of Convolution Operators to Problems in Univalent Function Theory,* Michigan, Math. J. 27 (1980), 81-94;
[6] L. Bieberbach, *Uber einige Extremal probleme im Gbiete der konformen Abbildun*g, Math. Ann., 77 (1916), 153-172;
[7] L. Bieberbach, *Uber die Koeffizientem derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb., 1916, 940-955;
[8] L. Brickman, Φ *-like analytic functions* I, bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 555-558;
[9] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154 (1985), 137-152;
[10] T. Bulboacă, *On some classes of differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 31, 1 (1986), 45-50;
[11] T. Bulboacă, *On some classes of differential subordinations II*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 31, 2 (1986), 13-21;
[12] T. Bulboacă, *Classes of first-order differential subordinations*, Mathematica (Cluj), 29 (52), 1 (1987), 113-118;
[13] T. Bulboacă, *Classes of first-order differential superordinations*, Demonstratio Mathematica, 352 (2002), 11-17;
[14] T. Bulboacă, *A classes of superordination - preserving integral operators*, Indag. Math. New Ser 13, 3 (2002), 301-311;
[15] T. Bulboacă, *Differential subordination and superordination – preserving integral operators*, Complex Analysis and Free Boundary Flows, Transactions of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 3, 1 (2004), 19-28;
[16] T. Bulboacă, M. A. Nasr, G. S. Sălăgean, *Function with negative coefficients n-starlike complex order*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 2 (1991), 7-12;
[17] T. Bulboacă, M. A. Nasr, G. S. Sălăgean, *A generalization of some classes of starlike functions of complex order*, Mathematica (Cluj), 34 (57), 2 (1992), 113-118;
[18] C., Caratheodory, *Uber den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen*, Math. Ann., 64 (1907), 95-115;
[19] C. Caratheodory, *Uber den Variabilitatsbereich der Fourie schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 32 (1911), 193-217;
[20] G. Călugăreanu, *Sur la condition necessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle*, C. R. Acad. Sci. Paris, 193 (1931), 1150-1153;
[21] G. Călugăreanu, *Sue les conditions necessaires et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle*, Mathematica, 6 (1932), 75-79;
[22] Z. Chazynski, M. Schiffer, *A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Scripta Math., 25 (1960), 173-181;

[23] Z. Chazynski, M. Schiffer, *A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 5 (1960), 187-193;
[24] N. E. Cho, T. H. Kim, *Multiplier transformations and strongly close-to-convex functions*, Bull. Korean Math. Soc., 40 (3) (2003), 399-410;
[25] N. E. Cho, H. M. Srivastava, *Argument estimates of certain analytic functions defined by a class of multiplier transformations*, Math. Comput. Modelling, 37(1-2) (2003), 39-49;
[26] H. B. Coonce, S. S. Miller, *Distortion properties of p-fold symmetric alpha-starlike functions,* Proc. Amer. Math. Soc., 44, 2 (1974), 336-340;
[27] P. J. Eenigenburg, *On α -convex functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19, 3 (1974), 305-310;
[28] G. Faber, *Neuer Berweis eines Koebe-Bieberbachschen satzer uber conforme Abbildung*, Sitzgsber. Bayer Acad. Wiss. Munchen, 1916, 39-42;
[29] C. H. Fitzgerald, *Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions*, Arch. Rational Mech. Anal., 46 (1972), 356-368;
[30] P. R. Garabedian, M. Schiffer, *A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, J. Rational Mech. Anal., 4 (1955), 427-465;
[31] G. M. Goluzin, *Zur Theorie der schlichten konformen Abbildungen*, Mat. Sbornik N. S., 42 (1935), 169-190;
[32] G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Mon., Amer. Math. Soc., 1968;
[33] A.W. Goodman, *The critical points of a typically-real function*, Proc. Amer. Math. Soc., 38, 1 (1973), 95-102;
[34] G. S. Goodman, *Univalent functions and optimal control*, Thesis, Staford Universitz, 1968;
[35] T. H. Gronwall, *Some remarks on conformal reprezentation*, Ann. of Math., 16 (1914-1915), 72-76;
[36] H. Grunsky, *Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung*, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 43 (1933), 140-142;
[37] W. K. Hayman, *The asymptotic behavior of p-valent functions*, Proc. London Math.Soc., (3) 5 (1955), 257-284;
[38] P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funcţii complexe),* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982;
[39] A.A. Holhoş, *Aplications of diferential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, volume XLVIII, 2 (2003), 61-63;
[40] H. M. Hossen, *Generalization of certain class of univalent functions with negative coefficients*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, XLVI, 2 (2001), 41-55;
[41] A. Hurwitz, *Uber die Anwendung der eliptischer Modul-functionen auf einen setz der allgemeinen Functionentheorie*, Vjscher Naturforsckala. Ges Zurich, 49 (1904), 242-253;
[42] S. Kanas, F. Ronning, *Uniformly starlike and convex functions and other related classes of univalent functions*, Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska, vol. L III, 10 (1999), 95-105;
[43] W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht function*s, Michigan Math. J.1, 2 (1952), 169-185;
[44] P. Koebe, *Uber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gottingen Math. Phys., (1907), 191-210;
[45] A. Lecko, T., Yaguchi, *Subclasses of typically-real functions defined by Sălăgean derivate*, Mathematica (Cluj), 38 (61), 1-2 (1996), 111-119;
[46] Z. Lewamdrowski, *Sur l' identite de certaines classes de fonctions univalentes I,* Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, sect. A, 12 (1958), 131-146;

[47] Z. Lewamdrowski, *Sur l' identite de certaines classes de fonctions univalentes II,* Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, sect. A, 14 (1960), 19-46;
[48] R. J. Libera, *Some classes of regular univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 755-758;
[49] E. Lindelof, *Memoire sue certaines inegalites dans la theorie des fonctions monogenes et sur quelques proprietes nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta Soc. Fenn., 35 (1908), No. 7;
[50] K. Lowner, *Untersuchungen uber die Verzerrung bei konforme Abbidungen des Einheitskreises* $|z|<1$*, die durch Funktionen mit nichtverschwinderder Ableitung geliefert werden*, Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Berichte, 69 (1917), 89-106;
[51] K. Lowner, *Untersuchungen über die Verzerrung bei schlichte konforme Abbidungen des Einheitskreises*, Math. Ann., 89 (1923), 103-121;
[52] T. H. Macgregor, *The radius of convexity for starlike functions of order* 1/2, Proc. Amer. Math. Soc, 14 (1963), 71-76;
[53] A.G. Macovei, *The Applications of Differential Subordinations in the Unit Disk*, Journal of Applied Computer Science & Mathematics, no. 5 (3) (2009), 46-47;
[54] A.G. Macovei, *An Application of the Briot-Bouquet Integral Operator for Differential Superordinations*, Journal of Applied Computer Science & Mathematics, no. 6 (3) (2009), 84-86;
[55] A.G. Macovei, *An application of Briot-Bouquet differential superordinations*, Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine Cluj-Napoca, volume 66 (2) (2009), 738-742;
[56] A.G. Macovei, *Differential superordinations and sandwich theorem* , Proceedings, Volume II, Polytechnic International Press Montreal, Quebec (2009), 336-338;
[57] A.G. Macovei, *An application of differential subordination,* Proceedings, Volume II, Polytechnic International Press Montreal, Quebec (2009), 333-335;
[58] A.G. Macovei, *An application of an integral operator using Briot-Bouquet differential superordination*, Scientific Studies and Research, Series Mathematics and Informatics Vol. 19, No. 2 (2009), 309 – 318;
[59] A.G. Macovei, *Differential Subordinations and Superordinations for Analytic Functions Defined by the Ruscheweyh linear Operator*, International Journal of Academic Research, Volume 3, No. 3, July 30 (2011), 7-14;
[60] A.G. Macovei, *Differential Subordinations and Superordinations for Analytic Functions Defined by a class of Multiplier Transformations*, Arabian Journal for Science and Engineering - Mathematics, trimis spre publicare;
[61] A.G. Macovei, *Some applications of differential subordinations*, Journal of Applied Computer Science & Mathematics, va apărea;
[62] A.G. Macovei, *Subclasses of univalent functions defined by convolution*, ARA 2011, înscris la conferință;
[63] A.G. Macovei, *Applications of Differential Subordinations and superordinations and Sandwich Theorems*, ARA 2011, înscris la conferință;
[64] A.G. Macovei, *Applications of Briot-Bouquet differential subordination*, preprint
[65] A.G. Macovei, *Some Applications of Differential Subordinations and superordinations and Sandwich Theorems*, preprint
[66] A.G. Macovei, *Applications of Differential Subordinations and superordinations*, preprint
[67] A.G. Macovei, *Application of Ruscheweyh linear operator in various differential subordination and superordination*, preprint

[68] A.G. Macovei, *Briot-Bouquet differential subordinations and superordinations using the linear operator*, preprint
[69] A.G. Macovei, *Subclasses of normed starlike and convex functions*, preprint
[70] A.G. Macovei, *Subclasses of normed univalent functions defined by convolution*, preprint
[71] A.G. Macovei, *Subclasses of normed starlike and convex functions* of order α, preprint
[72] A.G. Macovei, *Subclasses of normed alpha-convex functions*, preprint
[73] A.G. Macovei, Subclasses univalent functions with negative coefficients
Subclase de funcții univalente cu coeficienti negativi, preprint
[74] I. M. Milin, *Univalent functions and orthonormal systems*, "Nauka", Moscow, 1971 (Russian);
[75] S.S. Miller, *Distortion properties of alpha-starlike functions,* Proc. Amer. Math. Soc, 38, 2 (1973), 311-318;
[76] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second order differetial inequalities in the complex plane,* J. Math. Anal. Appl., 65 (1978), 298-305;
[77] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differntial subordinations and univalent functions*, Michig. Math. J., 28 (1981), 157-171;
[78] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *On some classes of first-order differential subordinations,* Michig. Math., 32(1985), 185-195;
[79] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Univalent solution of Briot – Bouquet differential equations,* J. Differential Equations, 56(1985), 297-308;
[80] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *On a class of spiralike integral operators,* Rev. Roum. Math. Pures AppL, 31, 3(1986), 225-230;
[81] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differntial subordinations and inequalities in the complex plane,* J. Diff. Eqn., 56 (1985), 185-195;
[82] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Marx-Strohhacker differential subordination systems*, Proc. Amer. Math. Soc., 99 (1987), 199-211;
[83] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Integral operators on certain classes of analytic functions*, Univalent Functions, Fractional Calculus and their Applications, Halstead Press, J. Wiley & Sons, New York (1989), 153-166;
[84] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Classes of univalent integral operators,* J. Math. Anal. Appl., 157, 1(1991), 147-165;
[85] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot – Bouquet differential equations and differential subordinations*, Complex V ariables. 33 (1997), 217-237;
[86] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Subordinants of Differential Superordinations,* Complex Variables. Vol. 48, No. 10 (2003), 815-826;
[87] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Briot – Bouquet differential superordinations and sandwich theorems,* J. Math. Anal. Appl., 329, 1(2007), 327-335;
[88] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M. O. Reade, *All α-convex functions are starlike*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 17, 9 (1972), 1395-1397;
[89] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M. O. Reade, *All α-convex functions are univalent and starlike*, Proc. Amer. Math. Soc., 37, 2 (1973), 553-554;
[90] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M. O. Reade, *Bazilevic functions and generalized convexity*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19, 2 (1974), 213-224;
[91] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M. O. Reade, *On the radius of alpha-convexity,* Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 22, 1 (1977), 35-39;
[92] P.T. Mocanu, *Une propriete de convexite generalisee dans la theorie de la representation conforme,* Mathematica (Cluj), 11 (34) (1969) , 127-133;

[93] P.T. Mocanu, *On a close-to-convexity preserving integral operator,* Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 32, 2 (1987), 49-52;
[94] P.T. Mocanu, *On a class of some classes of first-order differential subordinations*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math. Res. Sem., Seminar on Mathematical Analysis, Preprint (1991), 37-47;
[95] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G. S. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univatente,* Casa Cărţii de Ştiinţă (Cluj), 1999;
[96] P. T. Mocanu, Gr. Moldovan, M. O. Reade, *numerical computation of the convex Koebe function*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.-Mech., 19, 1 (1974), 37-46;
[97] P.T. Mocanu, G. Oros, *Sufficient conditions for starlikness*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 43, 1 (1998), 57-62;
[98] P.T. Mocanu, G. Oros, *Sufficient conditions for starlikness II*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 43, 1 (1998), 49-53;
[99] P.T. Mocanu, G. S. Sălăgean, *Integral operators and meromorphic starlike functions*, Mathematica (Cluj) , 32 (55) , 2 (1990) , 147-152;
[100] R. Nevanlinna, *Uber dieschlichten Abbidungen des Einheitkreises,* Oversikt av Finska Vet. Soc., Forh. (A), no 7, 62 (1920), 1-14;
[101] R. Nevanlinna, *Uber die konforme Abbidungen Sterngebieten,* Oversikt av Finska Vet. Soc., Forh. (A), no 6, 63 (1921);
[102] T. O. Opoola, *On a new subclass of univalent functions*, Mathematica (Cluj), 1994;
[103] G. I. Oros, *An application of Briot-Bouquet differential superordinations and sandwich theorem*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, vol. L, Number 1, 2005, 93-98;
[104] G. Oros, G. I. Oros, *An application of Briot-Bouquet differential superordinations*, Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematică, Nr. 1 (50) (2006), 101-104;
[105] G. I. Oroş, *Briot-Bouquet diferential subordinations and superordinations using the Dziok-Srivastava linear operator*, Math. Reports 11 (61), 2 (2009), 155-163;
[106] M. Ozawa, *On the theory of multivalent functions*, Sci. Rep. Tokyo Bunrika daigaku, A, 2, 40 (1935), 167-188;
[107] M. Ozawa, *An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient*, Kodai Math. Sem. Rep., 21 (1969), 129-132;
[108] S. Owa, *On a new class of analytic functions with negative coefficients,* Internat. J. Math. Sci., 7(4), 1984, 719-730;
[109] S. Owa, M. Obradovic, *An application of differential subordinations and some criteria for univalency*, Bull. Austral. Math. Soc., 41 (1990), 487-494;
[110] R. N. Pederson, *A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 31 (1968-69), 331-351;
[111] R. N. Pederson, *A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 45 (1972), 161-193;
[112] J. Plemelj, *Uber den Verzerrungssatz vom P. Koebe,* Ges. Dtsch. Naturforschren Arzte, 85, Versammlung Wien Zeiter teie, Erste Halfte, 1913;
[113] J. K. Prajapat, S. P. Goyal, *Applications of Srivastava-Attiya operator to the Classes of strongly starlike and strongly convex functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 3, 1 (2009), 129-137;
[114] B. N. Rahmanov, *On the theory of univalent functions,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 91 (1953), 729-732;
[115] B. N. Rahmanov, *On the theory of univalent functions,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 97 (1954), 973-976;

[116] M. O. Reade, *Sur une classe de fonctions univalentes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 239 (1954), 1758-1759;
[117] M. O. Reade, *On close-to-convex functions*, Michig. Math. J., 3 (1955), 59-62;
[118] M. S. Robertson, *A remark on the odd schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 42 (1936), 366-370;
[119] M. S. Robertson, *Analytic functions starlike in one direction*, Amer. J. Math., 58 (1936), 465-472;
[120] M. S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., 37 (1936), 374-408;
[121] S. Rucheweyh, *New criterion for univalent functions,* Proc. Amer. Math. Soc., 49(1975), 109-115;
[122] S. Rucheweyh, V. Singh, *On a Briot-Bouquet equation related to univalent functions*, Pev. Roum. Math. Pures Appl., 24 (1979), 285-290;
[123] K. Sakaguchi, *A note on p-valent functions,* J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 312-321;
[124] G. Ş. Sălăgean, *Properties of starlikeness and convexity preserved by some integral operators*, Roumanian – Finnish Seminar On Complex Analysis Proc. Bucharest (Springe-Verlag, Berlin), 1976 (1979) , 367-372;
[125] G. Ş. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Lect. Notes in Math., 1013, Springer Verlog, 1983, 362-372;
[126] G. Ş. Sălăgean, *Analytic functions with negative coefficients*, Mathematica (Cluj), 36 (59), 2 (1994), 219-224;
[127] G. Ş. Sălăgean, *Geometria Planului Complex*, Ed. Promedia Plus, Cluj-Napoca, 1997;
[128] G. Ş. Sălăgean, *Integral properties of certain classes of analytic functions with negative coefficients*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1 (2005), 125-131;
[129] G. Ş. Sălăgean, H. M. Hossen, M. K. Aouf, *On certain Classes of p-valent functions with negative coefficients*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Volume XLIX, 1 (2004), 77-85;
[130] A. C. Schaeffer, D. C. Spencer, *Coefficient regions for Schlicht Functions*, Amer., Math. Soc. Colloq. Publ., vol 35, New York, 1950;
[131] A. Schild, H. Silverman, *Convolution of univalent functions with negative coefficients*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, sect. A., 29 (1975), 99-107;
[132] T. N. Shanmugam, *Convolution and differential subordination,* Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 12, nr.2 (1989), 333-340;
[133] T.N. Shanmugam, S. Sivasubramnian, M. Darus, C. Ramachandran, *Subordinations and Superordination Results for Certain Subclasses of Analytic Functions*, International Mathematical Forum, no. 21, 2 (2007), 1039-1052;
[134] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients,* Proc. Amer. Math. Soc., 51 (1975), 109-116;
[135] S. Sivaprasad Kumar, H. C. Taneja, V. Ravichandran, *Classes of Multivalent Functions Defined by Dziok-srivastava linear Operator and Multiplier Transformation*, Kyungpook Math. J., 46 (2006), 97-109;
[136] L. Spacek, *Contribution a la theorie des fonctions univalentes,* Casopis Pest. Mat., 62 (1932), 12-19;
[137] H. M. Srivastava, A. A. Attiya, *An integral operator associated with the Hurwitz-Lerch zeta function and differential subordination,* Int. Trans. Spec. Func., 18, 3 (2007), 207-216;
[138] E. Study, *Vorlesungen über ausgewahlte Gegenstande der Geometrie*, 2. Heft, Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.